



Le equazioni del moto dei fluidi

L'equazione di continuità o di conservazione della massa

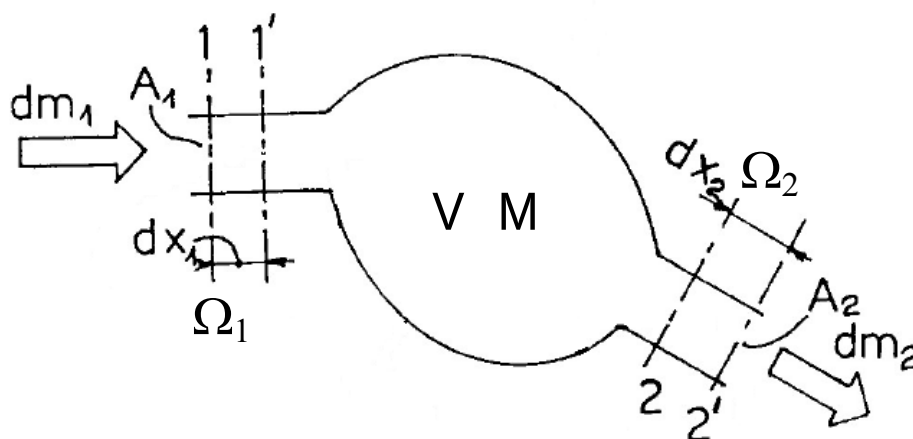


Fig. 4.1 – Schematizzazione di una macchina a fluido

Una macchina dinamica può essere pensata nel suo complesso come un particolare “tratto di condotto” attraversato da un fluido ed interessato da scambi di energia (Fig. 4.1). Questo “tratto di condotto” è delimitato da una superficie di controllo costituita da una parete impermeabile rappresentata dalla carcassa della macchina e da due superfici permeabili, Ω_1 ed Ω_2 , attraverso le quali il fluido può entrare od uscire dal sistema (rispettivamente sezione di adduzione o di ingresso e sezione di uscita o di deflusso). Il volume V racchiuso dalla superficie di controllo viene detto volume di controllo.

Il principio di conservazione della massa impone che la variazione nel tempo della massa M contenuta all'interno del volume di controllo sia pari al flusso netto di massa che attraversa la superficie di controllo:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad (4.1)$$

dove:

$$M = \int_V \rho \cdot dV. \quad (4.2)$$

Nel caso stazionario:



$$\frac{dM}{dt} = 0, \quad (4.3)$$

quindi:

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2. \quad (4.4)$$

Le Eqq. 4.1 e 4.4 rappresentano l'equazione di continuità rispettivamente nel caso generale e nel caso stazionario. In quest'ultimo caso l'equazione di continuità si esprime affermando che la portata massica del fluido che esce dalla superficie di controllo eguaglia quella entrante.

Ricordando l'espressione della portata massica (Eq. 2.4) e tenendo conto dell'ipotesi di unidimensionalità del moto, la Eq. 4.4 può essere scritta:

$$\rho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 \quad (4.5)$$

Se il fluido è incomprimibile la densità è costante ($\rho_1 = \rho_2$), quindi:

$$c_1 \cdot A_1 = c_2 \cdot A_2 \quad (4.6)$$

Per un fluido incomprimibile risulta pertanto che anche la portata volumetrica che entra nel volume di controllo eguaglia quella in uscita. Questo significa che, per un fluido incomprimibile ed in moto stazionario, ad un restringimento o ad un allargamento della sezione del condotto corrisponde una variazione della velocità inversamente proporzionale.



Esercizio svolto

Un condotto circolare presenta un allargamento della sezione, che passa da un diametro iniziale $\Phi_1=0,05$ m ad un diametro finale $\Phi_2=0,10$ m (Fig. 4.2). Il condotto è percorso da acqua in regime di moto stazionario. Sapendo che la velocità dell'acqua in corrispondenza della sezione di diametro minore è pari a 6 m/s, determinare la velocità nella sezione maggiore.

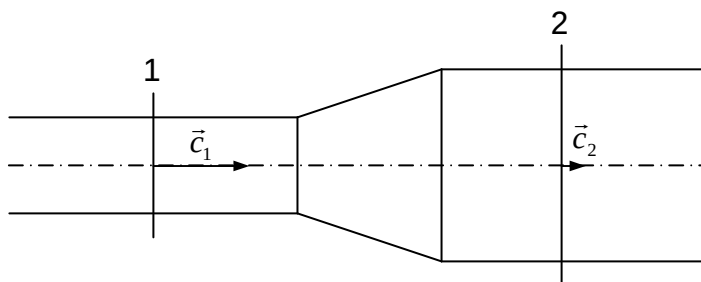


Fig. 4.2 – Condotto con allargamento di sezione

In ciascuna sezione del condotto la velocità dell'acqua presenta una distribuzione non uniforme (cfr Fig 2.7). È però possibile ricondurre il moto reale ad un modello unidimensionale considerando in ciascuna sezione le grandezze medie. Sotto questa ipotesi, dall'equazione di continuità è possibile ricavare:

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$$

Essendo:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot \Phi_1^2}{4}$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot \Phi_2^2}{4}$$

risulta:

$$c_2 = c_1 \cdot \frac{\frac{\pi \cdot \Phi_1^2}{4}}{\frac{\pi \cdot \Phi_2^2}{4}} = c_1 \cdot \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2} \right)^2 = 1,5 \text{ m/s}$$



Si può quindi osservare che ad un aumento dell'area della sezione di passaggio corrisponde una diminuzione della velocità dell'acqua lungo il condotto. Ovviamente vale anche il viceversa.



Guida allo studio

Illustrare il principio di conservazione della massa.



Guida allo studio

Esistono casi in cui l'Eq. 4.4 sia verificata anche in condizioni di moto non stazionario?