Le equazioni del moto dei fluidi

L'equazione di conservazione dell'energia in forma termodinamica

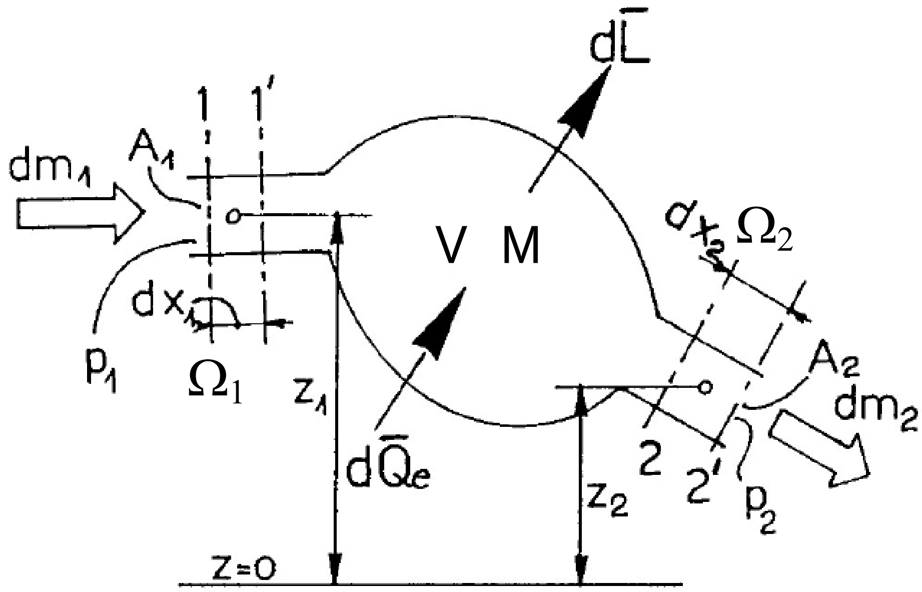

Fig. 5.1 – Schematizzazione di una macchina a fluido

Una macchina sia rappresentata con la schematizzazione di Fig. 5.1, secondo la quale è individuato il volume di controllo delimitato dalla carcassa della macchina stessa e dalle sezioni di ingresso e di uscita del fluido, Ω_1 ed Ω_2 rispettivamente. L'energia totale *E*, posseduta dal fluido contenuto all'interno del volume di controllo in un generico istante t_0, è data da:

$$E = \int_V e \cdot \rho \cdot dV \qquad (5.1)$$

dove *e* rappresenta l'energia totale specifica, somma dell'energia interna *u*, dell'energia cinetica $\frac{c^2}{2}$ e dell'energia potenziale gravitazionale $g \cdot z$, anche esse riferite all'unità di massa:

$$e = u + \frac{c^2}{2} + g \cdot z \qquad (5.2)$$

L'energia posseduta dal fluido contenuto all'interno del volume di controllo può variare nel tempo tra l'istante t_0 e l'istante successivo $t_0 + dt$ per effetto:

1) del calore $d\overline{Q}_e$ scambiato attraverso la superficie di controllo (positivo se entrante, negativo se uscente);
2) del lavoro meccanico $d\overline{L}$ scambiato con l'organo mobile della macchina (positivo se uscente, negativo se entrante). Il lavoro meccanico compiuto dalle forze di attrito agenti sul fluido si trasforma in calore (generazione interna). Il contributo offerto dal lavoro compiuto da queste forze alla variazione di energia del fluido contenuto all'interno del volume di controllo dipende pertanto da quanto il calore da esso generato viene scambiato con l'esterno ed è quindi inglobato nel termine $d\overline{Q}_e$;
3) dei flussi di energia associati alle masse di fluido transitanti attraverso le superfici permeabili del volume di controllo, $e \cdot dm$ (la massa in ingresso introduce nel volume di controllo il suo contenuto energetico, la massa in uscita, invece, sottrae al sistema la sua energia);
4) del lavoro meccanico esercitato sul sistema dal fluido in ingresso e del lavoro meccanico compiuto dal sistema sul fluido a valle della sezione di uscita (lavoro di spostamento o di pulsione, dL_{sp}).

Il principio di conservazione dell'energia applicato al volume di controllo tra gli istanti t_0 e $t_0 + dt$ può quindi essere scritto:

$$dE = d\overline{Q}_e - d\overline{L} + e_1 \cdot dm_1 - e_2 \cdot dm_2 + dL_{sp1} - dL_{sp2} \tag{5.3}$$

dove, indicando con p la pressione del fluido:

$$dL_{sp1} = p_1 \cdot A_1 \cdot dx_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot c_1 \cdot dt \tag{5.4}$$

$$dL_{sp2} = p_2 \cdot A_2 \cdot dx_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot c_2 \cdot dt \tag{5.5}$$

Dalla definizione della portata massica (Eq. 2.4), per l'ipotesi di unidimensionalità del moto, risulta:

$$A \cdot c \cdot dt = \frac{dm}{\rho} \tag{5.6}$$

che, sostituita nelle Eqq. 5.4 e 5.5, consente di scrivere:

$$dL_{sp1} = \frac{p_1}{\rho_1} \cdot dm \tag{5.7}$$

$$dL_{sp2} = \frac{p_2}{\rho_2} \cdot dm \tag{5.8}$$

Grazie alle Eqq. 5.7 e 5.8, la Eq. 5.3 può essere scritta:

$$\begin{aligned} dE &= d\overline{Q}_e - d\overline{L} + e_1 \cdot dm_1 - e_2 \cdot dm_2 + \frac{p_1}{\rho_1} \cdot dm - \frac{p_2}{\rho_2} \cdot dm = \\ &= d\overline{Q}_e - d\overline{L} + \left(e_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \cdot dm_1 - \left(e_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \cdot dm_2 = \\ &= d\overline{Q}_e - d\overline{L} + \left(u_1 + \frac{c_1^{\,2}}{2} + g \cdot z_1 + \frac{p_1}{\rho_1} \right) \cdot dm_1 - \left(u_2 + \frac{c_2^{\,2}}{2} + g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \right) \cdot dm_2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Ricordando la definizione dell'entalpia specifica *h*:

$$h = u + p \cdot v = u + \frac{p}{\rho} \tag{5.10}$$

nella quale *v* rappresenta il volume specifico, la Eq. 5.9 diventa:

$$dE = d\overline{Q}_e - d\overline{L} + \left(h_1 + \frac{c_1^{\,2}}{2} + g \cdot z_1 \right) \cdot dm_1 - \left(h_2 + \frac{c_2^{\,2}}{2} + g \cdot z_2 \right) \cdot dm_2 \tag{5.11}$$

Nell'ipotesi di moto stazionario risulta:

$$dE = 0 \tag{5.12}$$

$$dm_1 = dm_2 = dm \tag{5.13}$$

per cui, indicando con Q_e e con L rispettivamente il calore ed il lavoro scambiati per unità di massa del fluido transitante:

$$Q_e = \frac{d\overline{Q}_e}{dm} \tag{5.14}$$

$$L = \frac{d\overline{L}}{dm} \tag{5.15}$$

dalla Eq. 5.11 discende che:

$$\begin{aligned} Q_e - L &= \left(h_2 + \frac{c_2^{\,2}}{2} + g \cdot z_2 \right) - \left(h_1 + \frac{c_1^{\,2}}{2} + g \cdot z_1 \right) = \\ &= \left(h_2 - h_1 \right) + \left(\frac{c_2^{\,2}}{2} - \frac{c_1^{\,2}}{2} \right) + g \cdot \left(z_2 - z_1 \right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

La Eq. 5.16 costituisce l'equazione di conservazione dell'energia in forma termodinamica in termini finiti. Essa esprime il principio di conservazione dell'energia (primo principio della termodinamica) in riferimento all'intera trasformazione che si realizza tra le sezioni di ingresso e di uscita del volume di controllo. Differenziandola si ottiene:

$$dQ_e - dL = dh + c \cdot dc + g \cdot dz \tag{5.17}$$

La Eq. 5.17 costituisce pertanto l'equazione di conservazione dell'energia in forma termodinamica in termini differenziali. Essa esprime dunque il principio di conservazione dell'energia per le trasformazioni infinitesime che compongono la trasformazione globale che si realizza all'interno del volume di controllo.
Moltiplicando entrambi i membri della Eq. 5.16 per la portata massica che transita attraverso il volume di controllo, il principio di conservazione dell'energia viene espresso in termini delle corrispondenti potenze in gioco.

Guida allo studio

Individuare i termini che forniscono un apporto alla variazione dell'energia posseduta dal fluido all'interno del volume di controllo.

Guida allo studio

Si ricavi l'equazione di conservazione dell'energia in forma termodinamica in termini finiti.

Guida allo studio

Nell'ambito di un processo con deflusso, si individui la generica trasformazione elementare alla quale si applica l'equazione di conservazione dell'energia in forma termodinamica in termini differenziali.