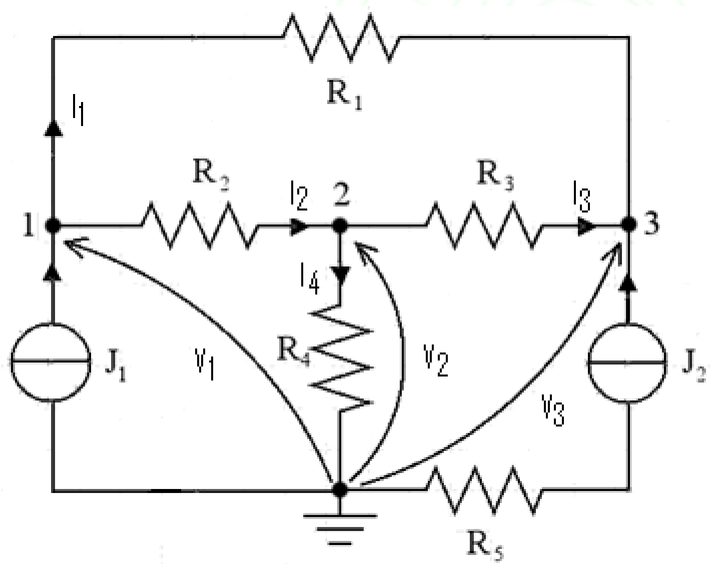
METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Il metodo del potenziale ai nodi consente di risolvere una rete avente l lati risolvendo un sistema di dimensioni minori di l.
Consideriamo un circuito avente n nodi e scegliamone uno di riferimento; l'obiettivo è quello di calcolare le tensioni tra gli n-1 nodi ed il nodo di riferimento, fatto questo possiamo determinare qualsiasi tensione d'interesse.
Le n-1 tensioni si possono calcolare risolvendo un sistema di n-1 equazioni ottenute applicando la LKC agli n-1 nodi.
I passi da seguire per applicare correttamente il metodo in esame sono i seguenti:
- scegliere un nodo come riferimento ed indicare con V_1,V_2, ... V_{n-1} le tensioni esistenti tra gli n-1 nodi ed il nodo di riferimento;
- rappresentare tutti i bipoli della rete che non sono puramente resistivi tramite il circuito equivalente di Norton. Se ci sono n_e lati in cui è presente solamente un generatore di tensione aggiungere n_e equazioni al sistema;
- scrivere un sistema di $n-1+n_e$ equazioni ottenute come segue: n-1 applicando la LKC agli n-1 nodi ed n_e identità, una per ogni generatore di tensione presente da solo sul lato.
Di seguito vedremo un esempio di applicazione del metodo.

METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Consideriamo il circuito in figura, esso ha n=4 nodi, scegliamone uno come riferimento ad esempio il nodo 4. Lo scopo è quello di calcolare le tensioni V_1,V_2, e V_3 tra gli n-1 nodi ed il nodo di riferimento. Dalla conoscenza di queste n-1 tensioni possiamo determinare qualsiasi tensione d'interesse. Le n-1 tensioni si possono ricavare risolvendo un sistema di n-1 equazioni ottenute applicando la LKC agli n-1 nodi.



METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Scriviamo un sistema di n-1=3 equazioni ottenute applicando la LKC ai 3 nodi, otterremo:

$$\begin{cases} -J_1 + I_1 + I_2 = 0 \\ -I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\ -J_2 - I_1 - I_3 = 0 \end{cases}$$

Esprimiamo le correnti dei lati I_1, I_2, I_3, I_4 in funzione dei potenziali ai nodi V_1, V_2 e V_3, otterremo:

$$I_1 = \frac{V_1 - V_3}{R_1} = G_1 \cdot (V_1 - V_3)$$

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_2} = G_2 \cdot (V_1 - V_2)$$

$$I_3 = \frac{V_2 - V_3}{R_3} = G_3 \cdot (V_2 - V_3)$$

$$I_4 = \frac{V_2}{R_4} = G_4 \cdot V_2$$

METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Sostituendo i valori delle correnti sui lati ed ordinando rispetto ai potenziali V_1,V_2 e V_3 otteniamo

$$\begin{cases} (G_1+G_2)\cdot V_1 - G_2\cdot V_2 - G_1\cdot V_3 = J_1 \\ -G_2\cdot V_1 + (G_2+G_3+G_4)\cdot V_2 - G_3\cdot V_3 = 0 \\ -G_1\cdot V_1 - G_3\cdot V_2 + (G_1+G_3)\cdot V_3 = J_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono le tensioni dei tre nodi V_1,V_2 e V_3 rispetto al nodo di riferimento. Conoscendo le tensioni V_1,V_2 e V_3 si possono calcolare tutte le tensioni e correnti della rete.

METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Per generalizzare possiamo riscrivere il sistema in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} G_1+G_2 & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & G_2+G_3+G_4 & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & G_1+G_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ J_2 \end{bmatrix}$$

La matrice è detta matrice delle conduttanze ed ha dimensioni $(n-1)_*(n-1)$.

METODO DEL POTENZIALE AI NODI

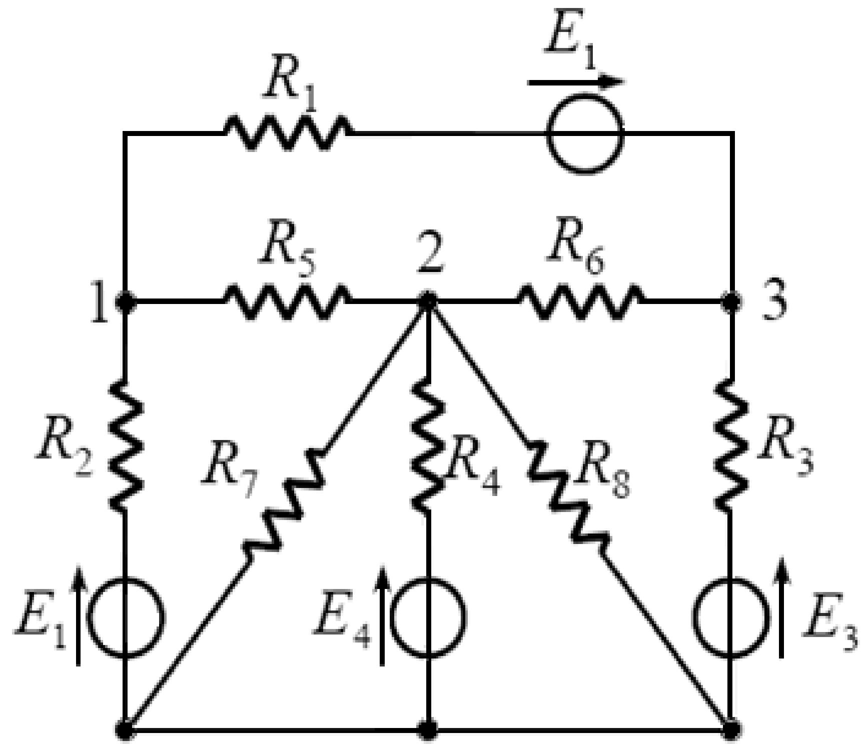
Riscrivendo tutto in forma matriciale genericamente otteniamo:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{(n-1)1} & G_{(n-1)2} & \cdots & G_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_{n-1} \end{bmatrix}$$

dove G_{ii} è detta auto-conduttanza del nodo i e si calcola come somma (col segno positivo) di tutte le conduttanze che fanno capo al nodo i. G_{ij} è detta mutua conduttanza tra i nodi i e j e si calcola considerando col segno negativo le conduttanze presenti tra i nodi i e j. Se tra i nodi i e j non ci sono resistenze G_{ij}=0. La matrice delle conduttanze è simmetrica.
V_i è la tensione incognita tra il nodo i ed il nodo preso a riferimento.
j_i è la somma algebrica di tutte le correnti impresse al nodo i (positive se entranti al nodo)

METODO DEL POTENZIALE AI NODI

Prendiamo ad esempio il circuito in figura: se sostituiamo ai lati dove sono presenti i generatori di tensione il circuito equivalente di Norton (ad esempio per il lato contenente E_1 ed R_1 si ha $R_N=R_1$, $I_N=E_1/R_1$), potremo scrivere il seguente sistema di tre equazioni che risolto ci consente di ottenere i valori di V_1, V_2 e V_3.



METODO DEL POTENZIALE AI NODI

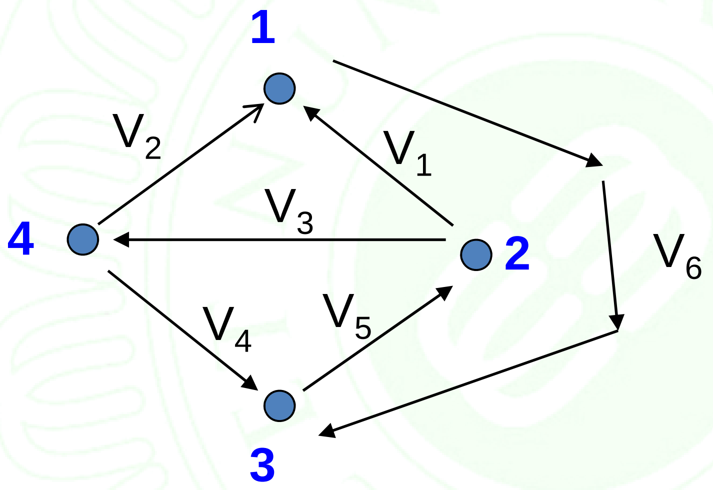
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_1} \\ -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}+\frac{1}{R_7}+\frac{1}{R_8} & -\frac{1}{R_6} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_6} & \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2} \\ \frac{E_4}{R_4} \\ \frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3} \end{bmatrix}$$

Matrice delle conduttanze

Vettore delle tensioni incognite

TENSIONI E MATRICE DI INCIDENZA

Consideriamo un grafo G avente n nodi ed l lati vogliamo determinare il legame esistente tra le l tensioni dei lati V_i e le n-1 tensioni e_i esistenti tra n-1 nodi ed un nodo di riferimento da noi individuato.



Se prendiamo come nodo di riferimento il nodo 3 avremo:
e_1= tensione tra il nodo 1 ed il nodo 3,
e_2= tensione tra il nodo 2 ed il nodo 3
e_4= tensione tra il nodo 4 ed il nodo 3

TENSIONI E MATRICE DI INCIDENZA

Analizzando il grafo otterremo le seguenti equazioni che rappresentano il legame tra le tensioni di lato V_i e le tensioni di nodo e_i:

$$\begin{cases} V_1 = e_1 - e_2 \\ V_2 = e_1 - e_4 \\ V_3 = -e_2 + e_4 \\ V_4 = -e_4 \\ V_5 = e_2 \\ V_6 = -e_1 \end{cases}$$

Questo sistema scritto in forma matriciale diventa **V**=M$_*$**E**
(i coefficienti della matrice sono i coefficienti delle e_i del sistema)

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

TENSIONI E MATRICE DI INCIDENZA

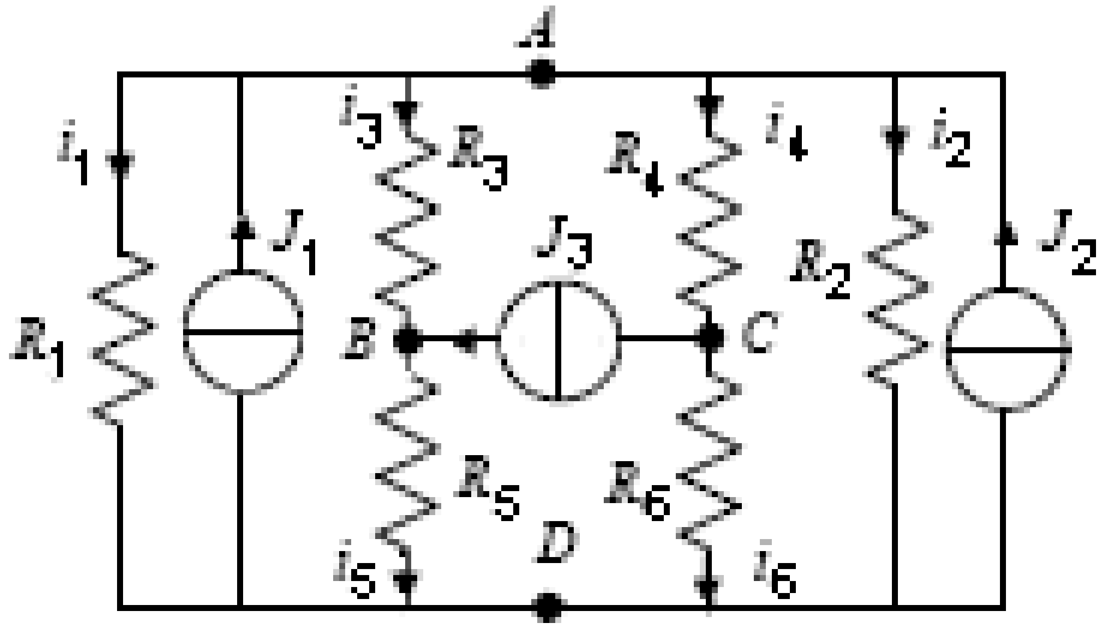
Si può facilmente verificare che $M = A_r^T$ dove A_r^T è la matrice di incidenza ridotta trasposta introdotta nella lezione n. 12 (senza il nodo tre),

quindi $\boldsymbol{V} = A_r^T * \boldsymbol{E}$

In conclusione*: Sia per scrivere le equazioni sulle correnti, sia per scrivere le equazioni sulle tensioni è importante determinare la matrice di incidenza ridotta.*

ESERCIZIO RISOLTO 1

ESERCIZIO RISOLTO 1. Dato il circuito in figura calcolare la tensione ai capi di R_4 utilizzando il metodo dei potenziali ai nodi.



ESERCIZIO RISOLTO 1

Il nodo scelto come riferimento è il nodo D; applicando la LKC ai nodi A B e C si ottiene .

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = J_1 + J_2 \\ -i_3 + i_5 = J_3 \\ -i_4 + i_6 = -J_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_1 V_A + G_2 V_A + G_3 (V_A - V_B) + G_4 (V_A - V_C) = J_1 + J_2 \\ -G_3 (V_A - V_B) + G_5 V_B = J_3 \\ -G_4 (V_A - V_C) + G_6 V_C = -J_3 \end{cases}$$

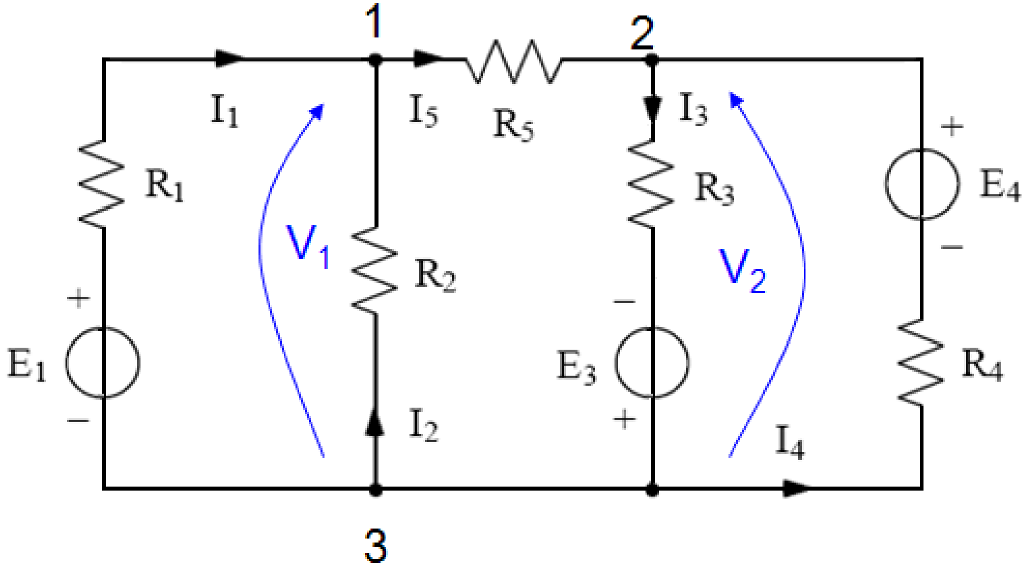
o equivalentemente in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 + G_3 + G_4 & -G_3 & -G_4 \\ -G_3 & G_3 + G_5 & 0 \\ -G4 & 0 & G_4 + G_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 + J_2 \\ J_3 \\ -J_3 \end{bmatrix}$$

Risolvendo il sistema si ottiene il vettore delle tensioni V_A,V_B e V_C

ESERCIZIO RISOLTO 2

ESERCIZIO RISOLTO 2. Dato il circuito in figura calcolare tutte le correnti mediante il metodo dei potenziali ai nodi.



E_1 = 10 V, E_3 = 70 V, E_4 = - 20 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 5 Ω, R_3 = 2 Ω, R_4 = 4 Ω, R_5 = 1 Ω.

ESERCIZIO SVOLTO

Il circuito ha n=3 nodi quindi dobbiamo impostare un sistema di due equazioni in due incognite, la matrice delle conduttanze avrà dimensioni 2x2.
Scegliamo il nodo 3 come riferimento e sostituiamo ai lati contenenti i generatori di tensione il circuito equivalente di Norton otteniamo:

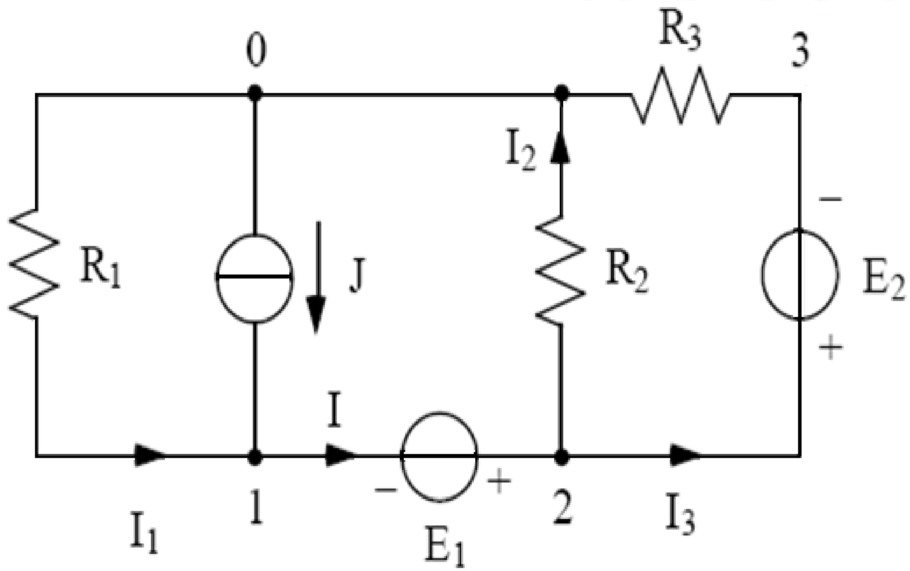
$$\begin{bmatrix} G_1+G_2+G_5 & -G_5 \\ -G_5 & G_3+G_4+G_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{R_1} \\ \dfrac{-E_3}{R_3}+\dfrac{E_4}{R_4} \end{bmatrix}$$

$G_1=1/R_1$, G_2… G_5 sono le conduttanze dei lati.
Ricavate le tensioni V_1 e V_2 si possono ricavare tutte le grandezze.
N.B.: Se avessimo risolto l'esercizio utilizzando le LKT e LKC avremmo dovuto impostare un sistema di cinque equazioni in cinque incognite.

Risposta: I_1 = 4 A, I_2 = 6 A, I_3 = 15 A, I_4 = 5 A, I_5 = 10 A.

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO PROPOSTO 1: Per il circuito in figura determinare la corrente I

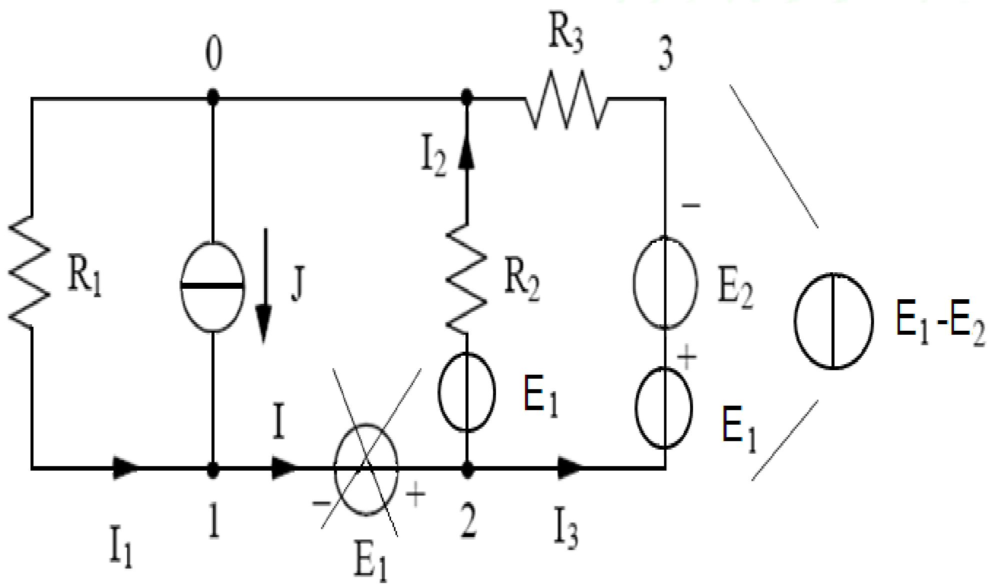


$E_1 = 12$ V, $E_2 = 6$ V, $J = 5$ A, $R_1 = 15\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 6\ \Omega$.

Suggerimento: spostare il generatore E_1 prima di applicare il metodo dei potenziale ai nodi

ESERCIZI PROPOSTI

Il circuito che si ottiene dopo lo spostamento del generatore E1 è riportato in figura :



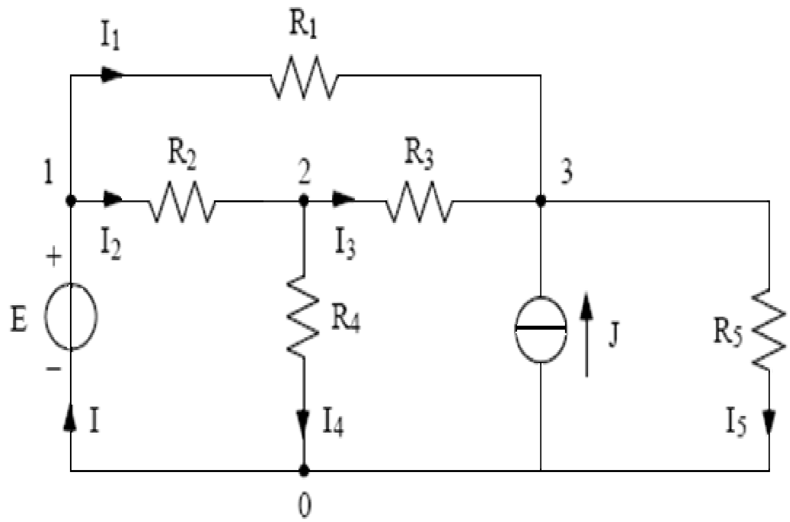
Sostituiamo alla serie dei due generatori di tensione un unico generatore dato dalla somma algebrica tra E_1 e E_2

Risposta I=5 A

ESERCIZI PROPOSTI

ESERCIZIO PROPOSTO 2: Dato il circuito in figura, calcolare le correnti in tutti i rami applicando il metodo dei potenziali ai nodi.

$E = 50$ V, $J = 0.75$ A, $R_1 = 800\ \Omega$, $R_2 = 80\ \Omega$, $R_3 = 40\ \Omega$, $R_4 = 50\ \Omega$, $R_5 = 200\ \Omega$.



Risposta $I = 0{,}196$ A , $I_1 = -4$ mA , $I_2 = 0{,}2$ A , $I_3 = -0{,}48$ A , $I_4 = 0{,}68$ A , $I_5 = 0{,}266$ A