

TEORIA DEI SEGNALI  
A. A. 2005–2006

DISPENSE DEL CORSO



Prof. Fortunato Santucci

e.mail: [santucci@ing.univaq.it](mailto:santucci@ing.univaq.it)

Universit degli Studi dell'Aquila, Dipartimento di Ingegneria Elettrica

Poggio di Roio, I-67040 L'Aquila



# Indice

<b>1</b>	<b>Definizione di segnale</b>	<b>5</b>
1.1	Conversione analogico–digitale . . . . .	5
1.2	Sistema di comunicazione . . . . .	6
1.3	Classificazione dei segnali: determinati e aleatori . . . . .	7
1.4	Segnali analogici e digitali . . . . .	8
1.5	Parametri energetici di un segnale . . . . .	9
1.6	Segnali periodici . . . . .	11
1.7	Segnali alternativi . . . . .	13
1.8	Segnali causali . . . . .	14
1.9	Durata di un segnale . . . . .	14
1.10	Somma e prodotto di segnali . . . . .	14
1.11	Traslazione di un segnale . . . . .	14
1.12	Esempi di segnali notevoli . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Rappresentazione nello spazio dei segnali</b>	<b>25</b>
2.1	Segnali continui periodici . . . . .	28
2.2	Proprietà della base di Fourier . . . . .	28
2.3	Criterio di Dirichlet . . . . .	29
2.4	Teorema di Parseval per segnali continui periodici . . . . .	29
2.5	Ampiezza e fase dei coefficienti di Fourier . . . . .	30
2.6	Prime proprietà della Trasformata Serie di Fourier . . . . .	35
2.6.1	Linearità . . . . .	35
2.6.2	Simmetria pari . . . . .	35
2.6.3	Simmetria dispari . . . . .	36
2.6.4	Segnale reale e pari . . . . .	36
2.6.5	Segnale reale e dispari . . . . .	36
2.6.6	Inversione dell’asse dei tempi . . . . .	37
2.6.7	Coniugio . . . . .	37
2.6.8	Traslazione nel tempo . . . . .	38
2.6.9	Derivazione . . . . .	38
2.6.10	Integrazione . . . . .	39
2.7	Rappresentazione di segnali impulsivi . . . . .	40
2.7.1	Spettro di fase e di ampiezza del segnale periodico . . . . .	42
2.8	Proprietà della Trasformata Continua di Fourier . . . . .	43
2.8.1	Segnale impulsivo . . . . .	43

2.8.2	Segnale di energia . . . . .	43
2.8.3	Linearità . . . . .	43
2.8.4	Hermitianità . . . . .	44
2.8.5	Parità . . . . .	44
2.8.6	Disparità . . . . .	44
2.8.7	Dualità . . . . .	44
2.8.8	Cambiamento di scala . . . . .	45
2.8.9	Coniugio . . . . .	45
2.8.10	Traslazione nel tempo . . . . .	45
2.8.11	Traslazione nella frequenza . . . . .	45
2.8.12	Teorema della modulazione . . . . .	46
2.9	Banda di un segnale . . . . .	46
2.10	Impulso ideale di Dirac . . . . .	47
2.10.1	Impulso esponenziale unilatero . . . . .	48
2.11	Effetti di un cambiamento di scala . . . . .	49
2.12	Spettro dell'esponenziale unilatero . . . . .	49
2.13	Impulso ideale di Dirac . . . . .	50
2.13.1	Proprietà . . . . .	50
2.13.2	Spettro della delta di Dirac . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Sistemi continui</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Proprietà . . . . .	53
3.2	Proprietà del prodotto di convoluzione . . . . .	55
3.3	Sistemi LTI . . . . .	57
3.3.1	Esempio . . . . .	59
3.3.2	Altre proprietà dei sistemi LTI . . . . .	60
3.3.3	Esempi di sistemi LTI . . . . .	61
3.4	Condizioni di non distorsione . . . . .	65
3.4.1	Casi di distorsione . . . . .	66
3.4.2	Sistema LTI con risposta in frequenza che non soddisfa le condizioni di Heaviside . . . . .	66
3.5	Filtri Lineari Ideali . . . . .	66
3.5.1	Filtro ideale passa-basso . . . . .	67
3.5.2	Filtro ideale passa-alto . . . . .	68
3.5.3	Filtro ideale passa-banda . . . . .	68
3.5.4	Filtro ideale elimina-banda o a reiezione di banda . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Correlazione tra segnali</b> . . . . .	<b>71</b>
4.1	Proprietà della correlazione mutua . . . . .	71
4.2	TCF della correlazione . . . . .	73
4.3	Caso di sistemi LTI . . . . .	74
4.4	Correlazione mutua tra segnali periodici . . . . .	75
<b>5</b>	<b>Campionamento</b> . . . . .	<b>77</b>
5.1	Campionamento di segnali continui . . . . .	77

---

<b>6</b>	<b>Esempi</b>	<b>83</b>
6.1	Spettri di ampiezza e di fase dell'impulso rettangolare . . . . .	83
6.2	Spettri di ampiezza e di fase dell'onda quadra . . . . .	85
6.3	Altro esempio . . . . .	87
6.4	Altro esempio . . . . .	89
6.5	Altro esempio . . . . .	90
6.6	TCF dell'esponenziale unilatero decrescente . . . . .	90
6.7	TCF di un treno di impulsi di Dirac . . . . .	92
6.8	TCF della funzione segno . . . . .	93
6.9	TCF del gradino unitario . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Esempi di calcolo di convoluzioni e correlazioni</b>	<b>97</b>
7.1	Convoluzione tra due rettangoli . . . . .	97
7.2	Autocorrelazione del rettangolo . . . . .	102
7.3	Autocorrelazione dell'esponenziale unilatero . . . . .	103
7.4	Filtro adattato . . . . .	105
7.5	Soluzione dell'esercizio 8 della prima parte . . . . .	106

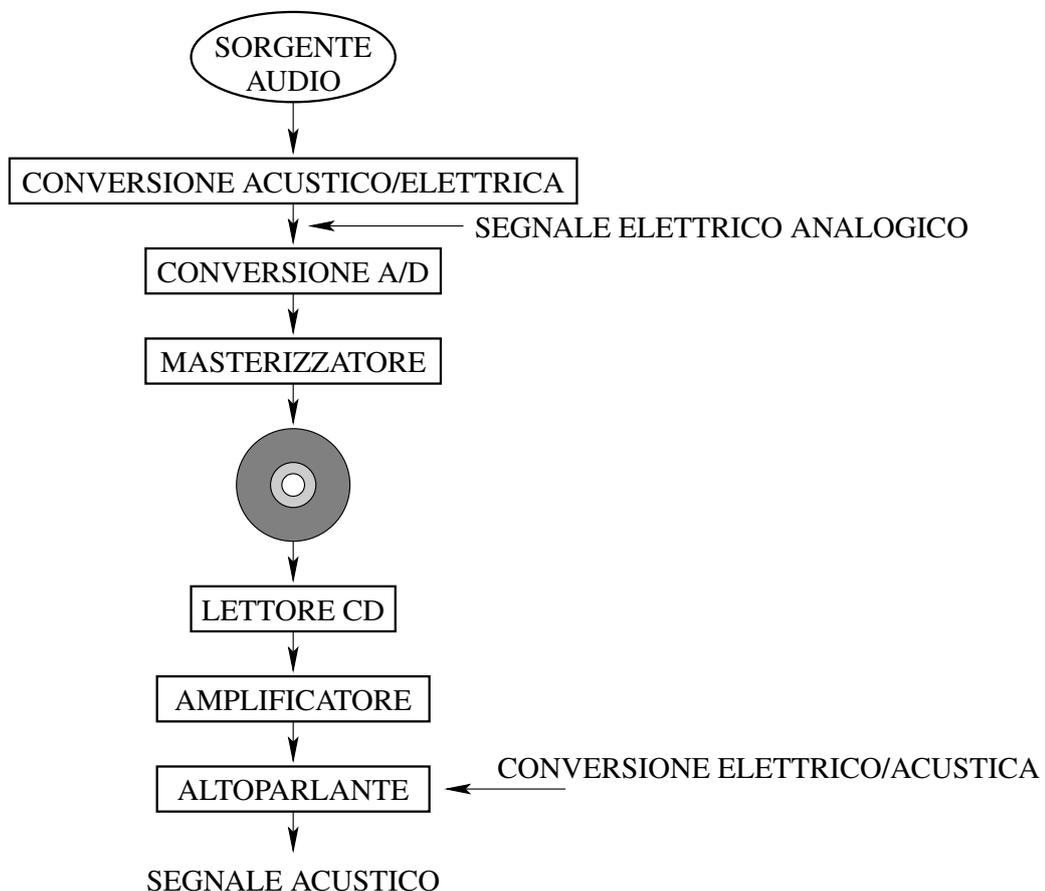


# Capitolo 1

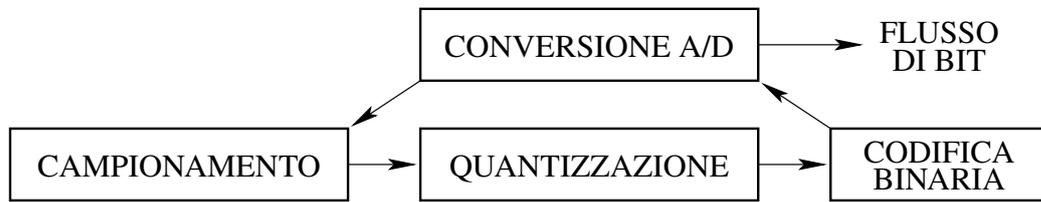
## Definizione di segnale

In analogia con la sua accezione nel linguaggio comune, un segnale rappresenta uno strumento per trasferire informazione. In altri termini, il segnale rappresenta il veicolo fisico dell'informazione. Scopo della Teoria dei Segnali è rappresentare e caratterizzare i segnali, nell'ottica di definire i presupposti matematici per la loro elaborazione e il loro impiego nei sistemi trasmissivi. Nel seguito forniremo due esempi che motivano la necessità di predisporre una base teorica per lo studio dei segnali.

### 1.1 Conversione analogico–digitale

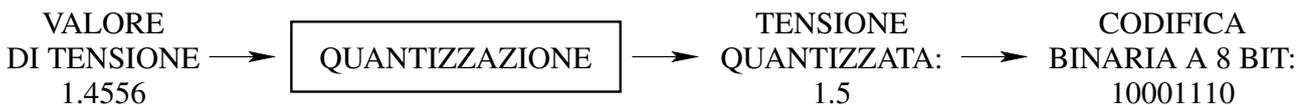


Per noi un segnale è generalmente *elettrico*. Operare una conversione analogico–digitale significa trasformare un segnale analogico in una sequenza di bit.



Passi per una conversione A/D:

- campionamento
- quantizzazione (è una tecnica che associa ad ogni valore di tensione il valore rappresentativo del suo intervallo; ad es., tutti i valori che cadono nell'intervallo  $1.4 \div 1.6$  vengono mappati sul valore 1.5)
- codifica binaria



Nel lettore CD è inclusa anche una conversione digitale–analogica. All'interno di tale convertitore, l'operazione fondamentale è l'*interpolazione*, che è l'operazione *duale* del *campionamento*. Il segnale elettrico in uscita dal lettore CD deve essere una riproduzione fedele del segnale elettrico di ingresso. Quindi in questo corso *analizzeremo, caratterizzeremo, rappresenteremo* i segnali. L'esempio descritto fino ad ora corrisponde all'*elaborazione di un segnale*. Tratteremo con maggiore profondità il *blocco di campionamento* e faremo dei cenni alla quantizzazione.

## 1.2 Sistema di comunicazione

Un sistema di comunicazione può essere rappresentato tramite i seguenti blocchi.



Il canale di comunicazione, nel migliore dei casi, non fa altro che attenuare il segnale; quindi, per far attraversare la tratta passiva al segnale, è necessario imprimergli una certa potenza.

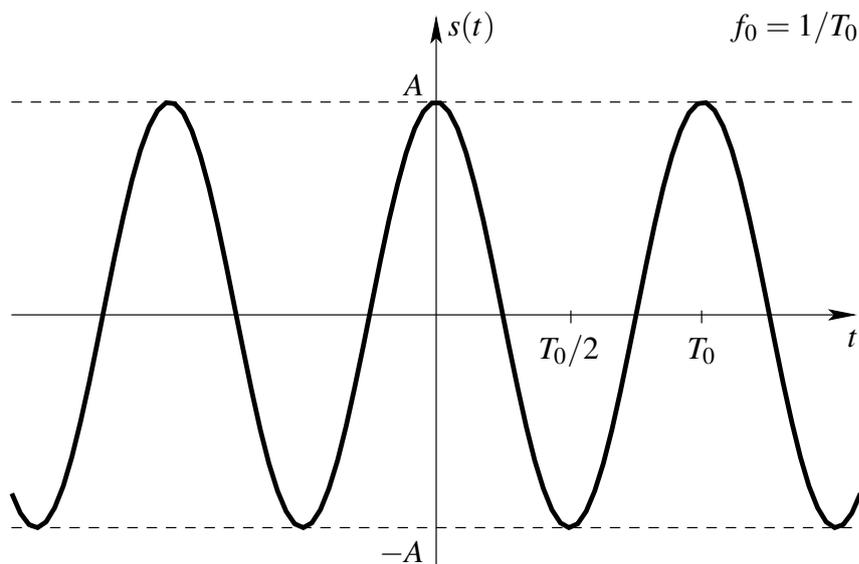
Un segnale, pur essendo una funzione reale, verrà trattato come una funzione complessa di variabile reale.

**Definizione di segnale:** un segnale è una grandezza fisica che varia nel tempo e viene denotato tramite la funzione  $s(t)$ . Nel caso di segnale elettrico, la grandezza fisica è una grandezza elettrica.

### 1.3 Classificazione dei segnali: determinati e aleatori

Il segnale si dice *determinato* se è descritto da una ben precisa legge, che per ogni valore di  $t$  consente di determinare il valore di  $s(t)$ .

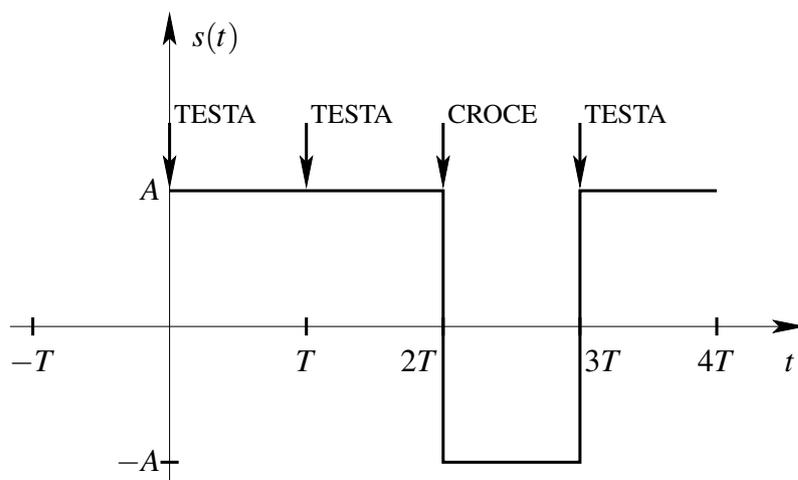
**Esempio:**  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$  con  $A, f_0 \in \mathbb{R}^+$  e  $f_0$  espressa in Hz. Illustriamo l'andamento con un grafico.



La frequenza non è altro che il numero di cicli nell'unità di tempo. La pulsazione è definita come  $\omega_0 = 2\pi f_0$ .

Un segnale aleatorio ha un andamento temporale non predicibile sulla base di una legge assegnata. Il comportamento di un segnale aleatorio è descrivibile solo in termini stocastici.

Esempio: ad intervalli regolari di tempo eseguo il lancio di una moneta. Se il risultato è *testa*, si assegna al segnale il livello di tensione positivo  $A$ , che viene mantenuto inalterato per tutta la durata dell'intervallo  $T$ ; se esce *croce*, si assegna  $-A$ .



Questo è un possibile andamento di  $s(t)$ , ma non è l'unico: per verificarlo, basta cambiare l'esito della sequenza di lanci. Tratteremo i segnali aleatori nella parte finale del corso.

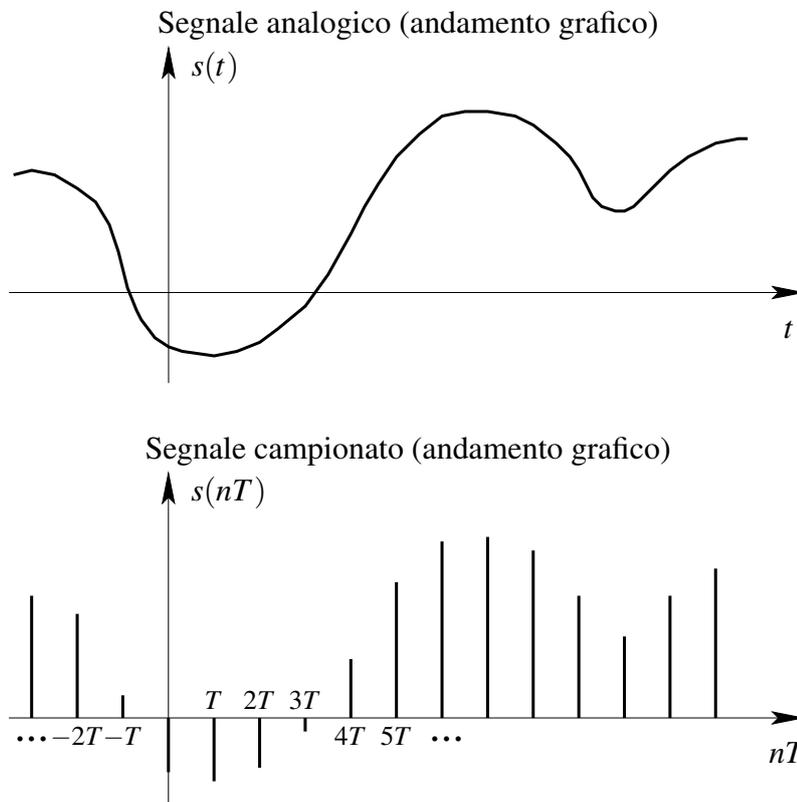
## 1.4 Segnali analogici e digitali

Sia per i segnali determinati che per quelli aleatori, indichiamo con

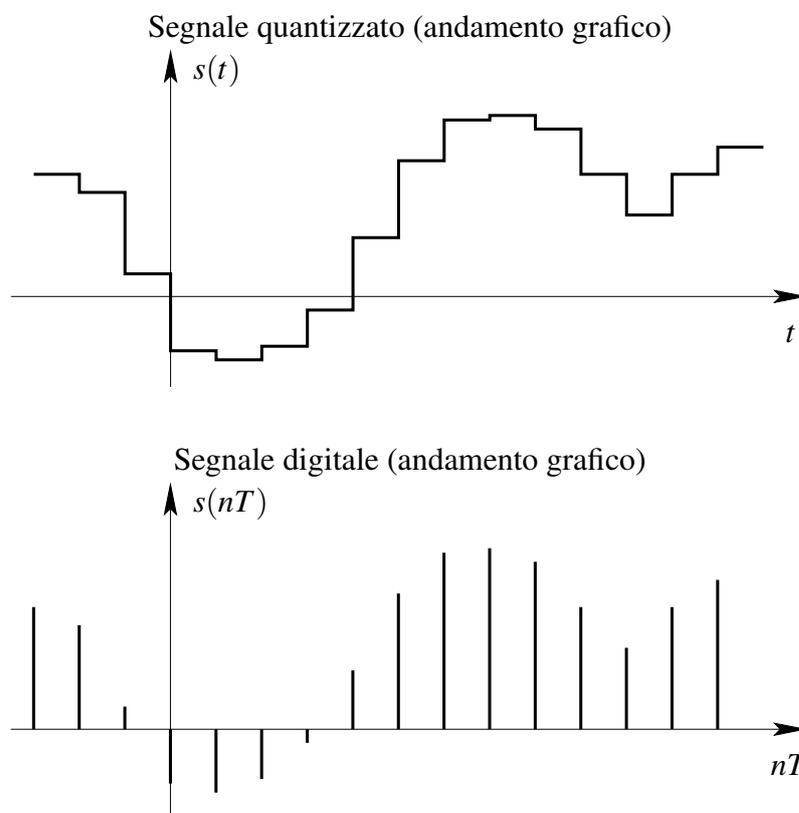
- $\mathbb{T}$ : dominio di  $s(t)$ .  
Se  $\mathbb{T} \equiv \mathbb{R}$ ,  $s(t)$  è di tipo *tempo continuo* (esiste ed è definito per qualunque  $t$ ). Se  $\mathbb{T} \equiv \mathbb{Z}(T) \equiv \{\dots, -2T, -T, 0, T, 2T, \dots\}$ ,  $s(t)$  è di tipo *tempo discreto* (esiste ed è definito per alcuni valori di  $t$ , l'insieme di questi valori è di cardinalità numerabile).
- $\mathbb{C}$ : codominio di  $s(t)$ .  
Se  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}$ ,  $s(t)$  è ad *ampiezza continua*. Se  $\mathbb{C} \equiv \mathbb{Z}(q) \equiv \{\dots, -2q, -q, 0, q, 2q, \dots\}$ ,  $s(t)$  è ad *ampiezza discreta* ( $\mathbb{Z}(q)$  deve essere a cardinalità finita).

	$\mathbb{T} \equiv \mathbb{R}$	$\mathbb{T} \equiv \mathbb{Z}(T)$
$\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}$	Segnali a tempo continuo e ampiezza continua (segnali analogici)	Segnali a tempo discreto e ampiezza continua (segnale campionato)
$\mathbb{C} \equiv \mathbb{Z}(q)$	Segnali a tempo continuo e ampiezza discreta (segnale quantizzato)	Segnali a tempo discreto e ampiezza discreta

Un segnale si dice *analogico* quando varia in maniera analogica rispetto al fenomeno che rappresenta. Un segnale *digitale* o *numerico* è un segnale a tempo e ampiezza discreta ma con ampiezze codificate (ad ogni elemento di  $\mathbb{Z}(q)$  associamo una stringa binaria).



$T =$  quanto temporale. Se  $T = 1 \Rightarrow s(n) = s(nT)$  è una sequenza. Si parla di sequenza quando il quanto temporale è pari a 1.



Ci occuperemo di segnali analogici e chiameremo *segnali continui* quelli che presentano tempo continuo e *segnali discreti* quelli che presentano tempo discreto; sottintenderemo che l'ampiezza è continua.

## 1.5 Parametri energetici di un segnale

Ad ogni segnale possiamo associare un contenuto energetico, espresso da

$$E_s(T) \triangleq \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \quad (1.1)$$

che chiamiamo *energia di  $s(t)$  riferita all'intervallo temporale  $(-T/2, T/2)$* , in cui assumiamo in generale che  $s(t)$  sia una funzione complessa di  $t$ :

$$s(t) = s_R(t) + j s_I(t) \quad (1.2)$$

dove  $s_R(t)$  e  $s_I(t)$  sono funzioni reali di  $t$ .

Ora supponiamo che  $s(t)$  rappresenti una tensione reale. In tal caso,  $s^2(t)/R$  rappresenta la potenza dissipata su un resistore ai cui capi sia applicata la tensione  $s(t)$ , mentre  $E_s(T)$  rappresenta l'energia

che viene dissipata su un resistore unitario. Effettuiamo il limite per  $T$  che tende a  $\infty$  di  $E_s(T)$  e ci chiediamo se converge. In caso affermativo, definiamo l'*energia di  $s(t)$* :

$$E_s \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T) \quad (1.3)$$

Quindi, il segnale  $s(t)$  è detto *segnale ad energia finita* o *segnale di energia* se  $0 < E_s < \infty$ , cioè se  $E_s(T)$  converge a un valore finito e non nullo.

Se  $\lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T)$  non converge, definiamo la potenza media di  $s(t)$  nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$ :

$$P_s(T) \triangleq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \frac{E_s(T)}{T} \quad (1.4)$$

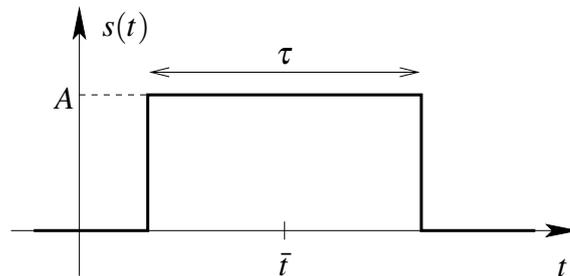
Dire che  $\lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T)$  non converge significa dire che il segnale possiede energia infinita, ecco perché si tenta di definire una potenza. Definiamo la *potenza media di  $s(t)$* :

$$P_s \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} P_s(T) \quad (1.5)$$

Il segnale  $s(t)$  è detto *segnale a potenza finita* o *segnale di potenza* se  $0 < P_s < \infty$ , cioè se  $P_s(T)$  converge a un valore finito e non nullo.

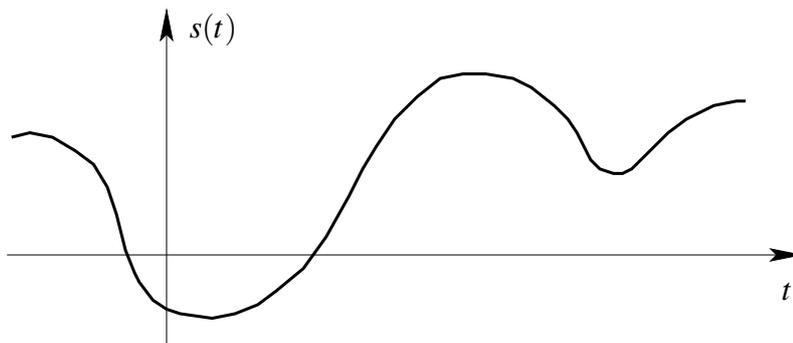
L'ipotesi di ampiezza finita ci permette di dire che i *segnali di energia* e i *segnali di potenza* costituiscono due classi disgiunte, cioè che un segnale o è di potenza oppure è di energia ma non può essere sia di potenza che di energia.

**Esempio di segnale di energia:**



$$E_s(T) = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{\bar{t}-\tau/2}^{\bar{t}+\tau/2} A^2 dt = A^2 [\bar{t} + \tau/2 - \bar{t} + \tau/2] = A^2 \tau \quad (1.6)$$

**Esempio di segnale di potenza:**



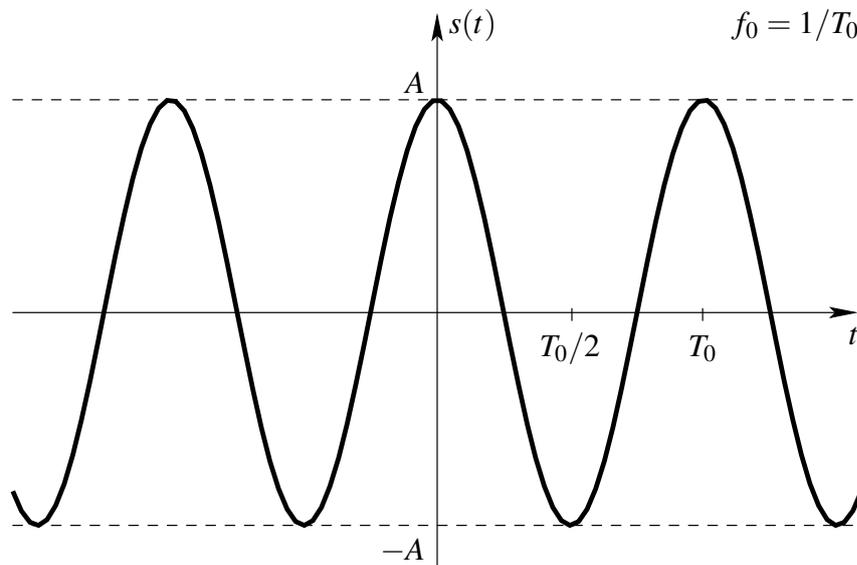
## 1.6 Segnali periodici

Diremo che  $s(t)$  è *periodico* se esiste un  $T_0$  tale che  $s(t) = s(t + T_0)$ ,  $\forall t$ . In tal caso, vale anche la condizione

$$s(t) = s(t + T_0) = s(t + 2T_0) = \dots = s(t + nT_0) \quad , \quad \forall t \quad (1.7)$$

Si dice periodo il più piccolo tra gli intervalli temporali per cui vale quest'ultima condizione. Evidentemente, un segnale periodico ha durata illimitata.

**Esempio:** andamento di funzioni periodiche,  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$



Dobbiamo cercare il più piccolo valore di  $T_0$  che soddisfi la definizione appena data. Verifichiamo che il periodo vale  $T_0 = 1/f_0$ :

$$\begin{aligned} s(t + nT_0) &= A \cos[2\pi f_0(t + nT_0)] = A \cos[2\pi f_0 t + 2\pi f_0 T_0 n] = A \cos[2\pi f_0 t + 2\pi n] \\ &= A \cos(2\pi f_0 t) = s(t) \end{aligned} \quad (1.8)$$

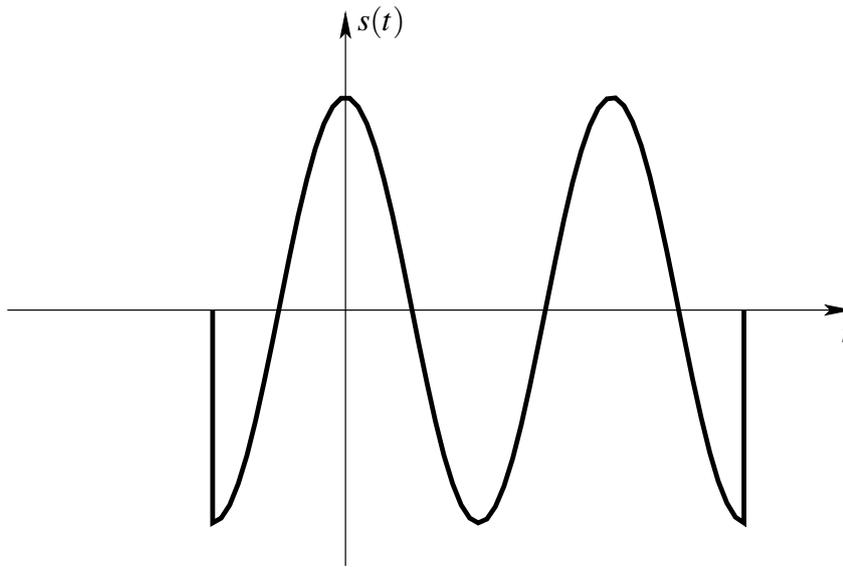
Altro esempio, che generalizza quello appena proposto:

$$s(t) = A e^{j2\pi f_0 t} = A \cos(2\pi f_0 t) + jA \sin(2\pi f_0 t) \quad (1.9)$$

Anche in questo caso, il periodo è  $T_0 = 1/f_0$ :

$$s(t + nT_0) = A e^{j2\pi f_0(t + nT_0)} = A e^{j2\pi f_0 t} e^{j2\pi f_0 T_0 n} = A e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{e^{j2\pi n}}_{=1} = A e^{j2\pi f_0 t} = s(t) \quad (1.10)$$

Il seguente segnale, corrispondente alla finestratura di una cosinusoidale, non è periodico:



Il segnale periodico appena esaminato è di potenza. Calcoliamo la potenza media di un generico segnale periodico.

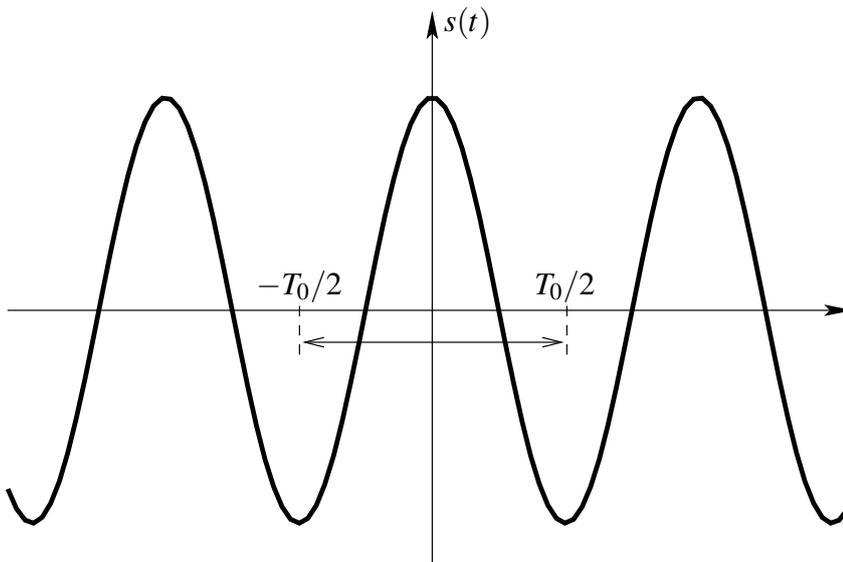
$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt \quad (1.11)$$

Vogliamo trovare un'espressione più semplice ponendo  $T = (2N + 1)T_0$ ; per far tendere  $T$  a  $\infty$  si fa tendere  $N$  a  $\infty$ :

$$P_s = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N + 1)T_0} \cdot (2N + 1) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt \quad (1.12)$$

Questa è l'espressione della potenza media di un segnale periodico. Evidentemente, l'energia dello stesso segnale diverge:

$$\begin{aligned} E_s &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} (2N + 1) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} (2N + 1) \\ &= T_0 P_s \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} (2N + 1) \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.13)$$



**Esempio:** calcoliamo la potenza di  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , sapendo che  $T_0 = 1/f_0$ .

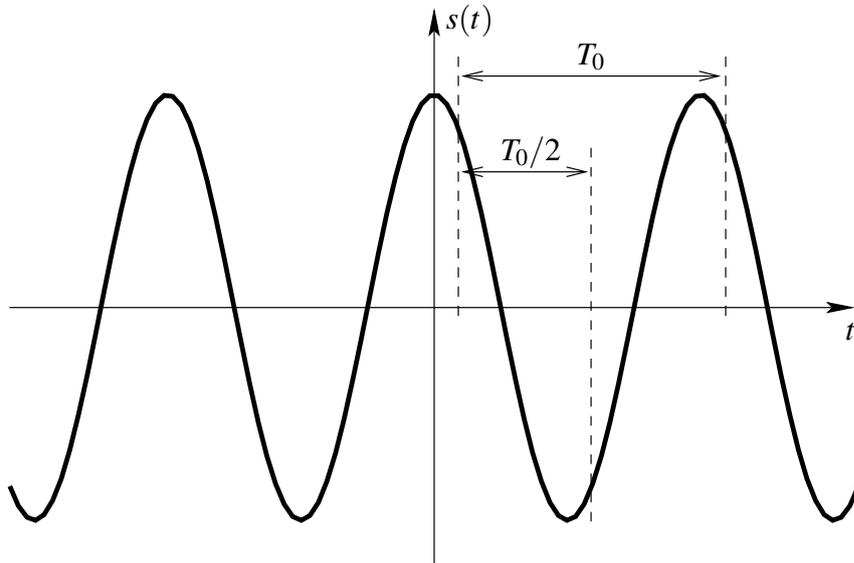
$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_0 t) dt = \frac{A^2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi f_0 t)] dt \\ &= \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2T_0} \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \cos(4\pi f_0 t) dt}_{=0} = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Si definisce *valore efficace*:  $s_M = \sqrt{P_s} = A/\sqrt{2}$ .

## 1.7 Segnali alternativi

Un segnale periodico  $s(t)$ , di periodo  $T_0$ , è detto *alternativo* se  $s(t) = -s(t + T_0/2)$ .

L'esempio  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ , fatto precedentemente, corrisponde a un segnale alternativo:



Definizione della media:

$$s_m = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \quad (1.15)$$

Per un segnale periodico si ha:

$$s_m = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) dt \quad (1.16)$$

Evidentemente, un segnale alternativo ha valor medio nullo; infatti, si ha:

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) dt = \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-T_0/2}^0 s(t) dt + \int_0^{T_0/2} s(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T_0} \left[ \int_{-T_0/2}^0 s(t) dt - \int_{-T_0/2}^0 s(t) dt \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

## 1.8 Segnali causali

Un segnale  $s(t)$  si dice *causale* se  $s(t) = 0$  per  $t < 0$  o, più in generale, se  $s(t) = 0$  per  $t < t_0$ . Il senso di questa definizione risulterà chiaro più avanti, quando verrà introdotta la risposta impulsiva di un sistema.

## 1.9 Durata di un segnale

**Definizione 1** La durata di un segnale è definita come misura del supporto della funzione  $s(t)$ .

Nel caso del primo esempio fatto di segnale di energia, la funzione  $s(t)$  è centrata in  $\bar{t}$ , di ampiezza  $A$  da  $\bar{t} - \tau/2$  a  $\bar{t} + \tau/2$  e nulla altrove; la sua durata è pari a  $\tau$ , cioè all'ampiezza dell'intervallo temporale su cui  $s(t)$  è non nullo.

**Marco:** è decisamente ora di mettere le figure come si deve, dentro l'ambiente figure e con delle label che permettano di referenziarle!

## 1.10 Somma e prodotto di segnali

Siano dati due segnali rappresentati dalle funzioni del tempo  $s_1(t)$  e  $s_2(t)$ .

Si definisce la loro **somma** come il segnale rappresentato dalla somma delle corrispondenti funzioni:

$$s_{\text{somma}}(t) = s_1(t) + s_2(t) \quad (1.18)$$

Si definisce la loro **differenza** come il segnale rappresentato dalla differenza delle corrispondenti funzioni:

$$s_{\text{differenza}}(t) = s_1(t) - s_2(t) \quad (1.19)$$

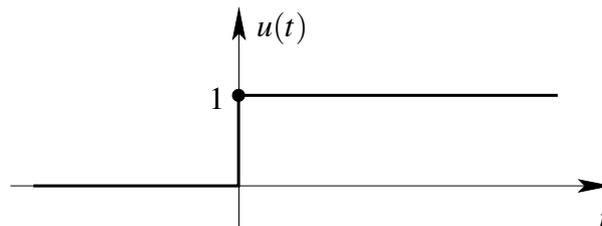
Si definisce il loro **prodotto** come il segnale rappresentato dal prodotto delle corrispondenti funzioni:

$$s_{\text{prodotto}}(t) = s_1(t) \cdot s_2(t) \quad (1.20)$$

## 1.11 Traslazione di un segnale

Per gli scopi di questa discussione, consideriamo la definizione di un segnale notevole, detto **gradino unitario**:

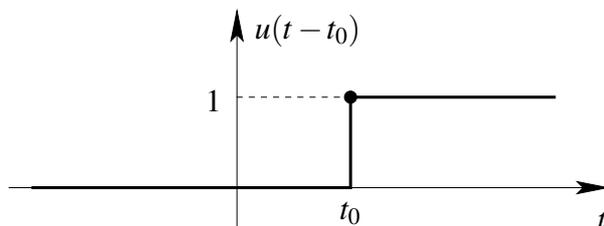
$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} \quad (1.21)$$



Ora consideriamo una versione traslata di questo segnale:  $u(t - t_0)$ ; sulla base della definizione appena data, si ha

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{per } t - t_0 \geq 0 \\ 0 & \text{per } t - t_0 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq t_0 \\ 0 & \text{per } t < t_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Quindi, se  $t_0 > 0$ ,  $u(t - t_0)$  ha il seguente andamento:



Questo esempio illustra la **traslazione** di un segnale: sostituire l'argomento  $t$  con  $t - t_0$  per  $t_0 > 0$  corrisponde a traslare il segnale *verso destra*, cioè a *ritardarlo*; analogamente, sostituire l'argomento  $t$  con  $t + t_0$  per  $t_0 > 0$  corrisponde a traslare il segnale *verso sinistra*, cioè ad *anticiparlo*. Ovviamente, i tipi di traslazione (ritardo e anticipo) si scambiano se  $t_0 < 0$ .

## 1.12 Esempi di segnali notevoli

**Osservazione.** Un segnale di energia è associato a una funzione  $s(t)$  di classe  $L^2$ . Se  $s(t)$  è un segnale di energia,

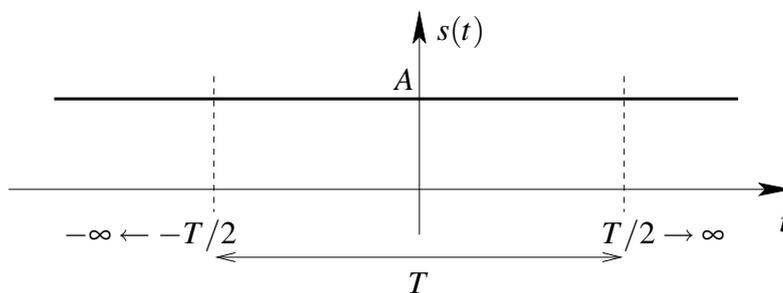
$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty \quad \Rightarrow \quad s(t) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (1.23)$$

Se  $s(t)$  è un segnale impulsivo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)| dt < +\infty \quad \Rightarrow \quad s(t) \in L^1(\mathbb{R}) \quad (1.24)$$

### Esempi

1. Segnale costante e limitato.  $s(t) = A \forall t, A \in \mathbb{R}$ .



Nel grafico si considera il caso  $A > 0$  ( $A \in \mathbb{R}^+$ ).

L'energia di  $s(t)$  riferita all'intervallo temporale  $(-T/2, T/2)$  è

$$E_s(T) = \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 \int_{-T/2}^{T/2} dt = A^2 T \quad (1.25)$$

quindi l'energia di  $s(t)$  è

$$E_s = \lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} A^2 T = A^2 \lim_{T \rightarrow \infty} T = A^2 \cdot \infty = \infty \quad (1.26)$$

Poiché  $E_s$  è infinita,  $s(t)$  non è un segnale di energia. Quindi ci chiediamo se sia un segnale di potenza.

La potenza media di  $s(t)$  nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$  è

$$P_s(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T} E_s(T) = \frac{1}{T} A^2 T = A^2 \quad (1.27)$$

Poiché la potenza istantanea del segnale  $|s(t)|^2$  è costante e identicamente pari ad  $A^2$ ,  $P_s(T)$  è finita e indipendente da  $T$ , quindi evidentemente  $P_s \equiv P_s(T)$ :

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} P_s(T) = P_s(T) = A^2 < \infty \quad (1.28)$$

Poiché  $0 < P_s < T$ ,  $s(t)$  è un segnale di potenza.

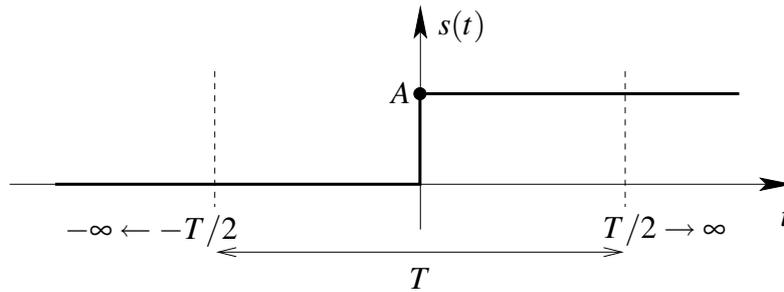
Evidentemente, poiché i parametri energetici fanno riferimento al modulo quadro del segnale, si ottengono gli stessi risultati anche per  $A < 0$ .

Il caso  $A = 0$  non è di particolare interesse, perché corrisponde al caso degenero di segnale identicamente nullo.

Se, più in generale,  $A$  è complesso ( $A \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ ), le espressioni ricavate continuano a valere, purché si sostituisca  $A^2$  con  $|A|^2$ .

## 2. Segnale a gradino.

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases} = A u(t) \quad , \quad A \in \mathbb{R} \quad (1.29)$$



Nel grafico si considera il caso  $A > 0$  ( $A \in \mathbb{R}^+$ ).

L'energia di  $s(t)$  riferita all'intervallo temporale  $(-T/2, T/2)$  è

$$E_s(T) = \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} A^2 dt = A^2 \int_0^{T/2} dt = \frac{A^2 T}{2} \quad (1.30)$$

quindi l'energia di  $s(t)$  è

$$E_s = \lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2 T}{2} = \frac{A^2}{2} \lim_{T \rightarrow \infty} T = \frac{A^2}{2} \cdot \infty \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

Poiché  $E_s$  è infinita,  $s(t)$  non è un segnale di energia. Quindi ci chiediamo se sia un segnale di potenza.

La potenza media di  $s(t)$  nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$  è

$$P_s(T) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T} E_s(T) = \frac{1}{T} \cdot \frac{A^2 T}{2} = \frac{A^2}{2} \quad (1.32)$$

Anche in questo caso,  $P_s(T)$  è finita e indipendente da  $T$ , quindi

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} P_s(T) = P_s(T) = \frac{A^2}{2} < \infty \quad (1.33)$$

Poiché  $0 < P_s < T$ ,  $s(t)$  è un segnale di potenza.

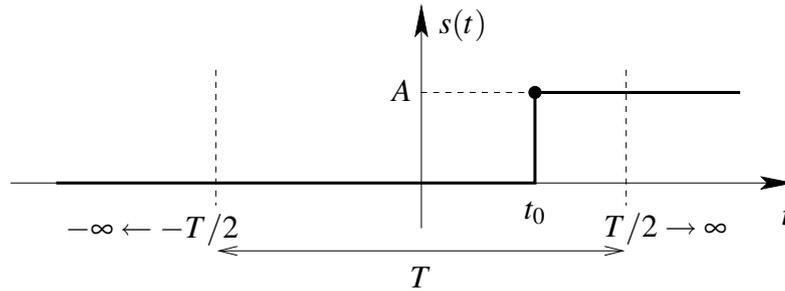
Si nota che la potenza media è dimezzata rispetto al segnale costante della stessa ampiezza; questo risultato può facilmente essere compreso osservando che la durata (infinita) del segnale è appunto "dimezzata".

Abbiamo appena visto due esempi di segnale a potenza finita.

Ora consideriamo una versione traslata del segnale appena visto:

$$s(t) = A u(t - t_0) \quad (1.34)$$

Se  $t_0 > 0$ ,  $s(t)$  ha il seguente andamento:



L'energia di  $s(t)$  riferita all'intervallo temporale  $(-T/2, T/2)$ , per  $T$  sufficientemente grande ( $T/2 \geq t_0$ ), è

$$E_s(T) = \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_{t_0}^{T/2} A^2 dt = A^2(T/2 - t_0) \quad (1.35)$$

quindi l'energia di  $s(t)$  è infinita anche in questo caso.

La potenza media di  $s(t)$  nell'intervallo  $(-T/2, T/2)$  è

$$P_s(T) = \frac{1}{T} E_s(T) = \frac{1}{T} A^2(T/2 - t_0) = A^2(1/2 - t_0/T) \quad (1.36)$$

e la potenza media di  $s(t)$  è

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} P_s(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} [A^2(1/2 - t_0/T)] = A^2/2 - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2 t_0}{T} = A^2/2 - 0 = \frac{A^2}{2} \quad (1.37)$$

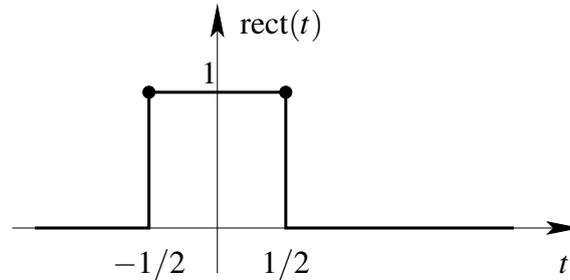
Poiché  $0 < P_s < \infty$ , si tratta ancora di un segnale di potenza.

Confrontando questi ultimi risultati con quelli ottenuti per  $t_0 = 0$ , si nota che la traslazione non ha modificato l'energia e la potenza media del segnale; è facile convincersi che questo è un risultato di validità generale.

## 3. Impulso rettangolare.

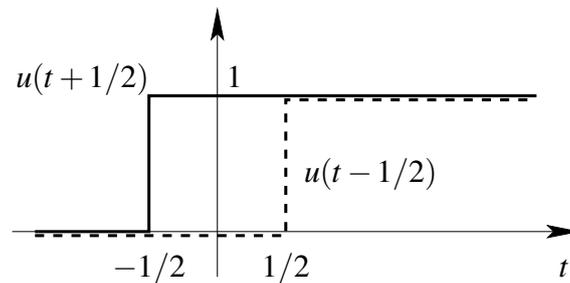
Definiamo la  $\text{rect}(\cdot)$  come segue:

$$\text{rect}(t) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{per } |t| \leq 1/2 \\ 0 & \text{per } |t| > 1/2 \end{cases} \quad (1.38)$$



La  $\text{rect}(\cdot)$  può essere scritta come differenza tra due opportuni gradini traslati<sup>1</sup>:

$$\text{rect}(t) = u(t + 1/2) - u(t - 1/2) \quad (1.39)$$

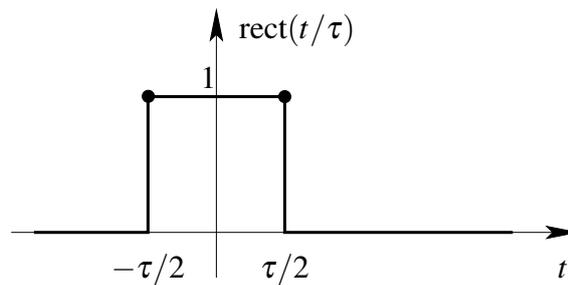


L'impulso rettangolare di durata  $\tau$ , con  $\tau \in \mathbb{R}^+$ , può essere definito proprio in termini della  $\text{rect}(\cdot)$ :

$$G_\tau(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} 1 & \text{per } \left|\frac{t}{\tau}\right| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{per } \left|\frac{t}{\tau}\right| > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{per } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & \text{per } |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (1.40)$$

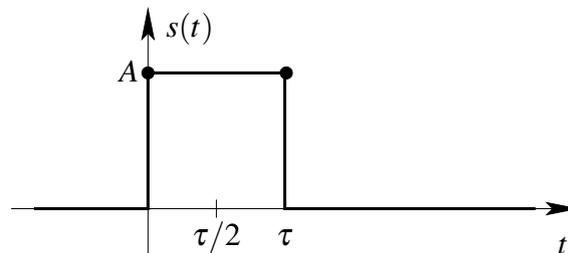
dove, nell'argomento della  $\text{rect}(\cdot)$ , il numeratore indica la variabile temporale, il denominatore rappresenta la durata.

<sup>1</sup>Si potrebbe notare che in realtà, con le definizioni scelte, la (1.39) non vale per  $t = 1/2$ :  $\text{rect}(1/2) = 1 \neq u(1/2 + 1/2) - u(1/2 - 1/2) = u(1) - u(0) = 1 - 1 = 0$ . Questa anomalia potrebbe essere risolta definendo  $\text{rect}(t)$  come pari a 0 in  $t = 1/2$ , ma questa scelta comporterebbe altre analoghe piccole incongruenze. Il problema può essere risolto definendo i segnali notevoli in questione in modo tale che, nei punti di discontinuità, assumano il valore medio tra il limite destro e il limite sinistro; questa scelta sarebbe anche coerente con i risultati forniti dall'antitrasformata di Fourier, come ci dice il criterio di Dirichlet. D'altra parte, lo stesso criterio ci assicura che due segnali che differiscono solo su un insieme di punti di misura nulla hanno la stessa trasformata, a conferma di ciò che è comunque facile intuire, cioè che la discussione in questione non è di interesse pratico. Per questi motivi, nel seguito, sui punti di discontinuità, i segnali potranno essere definiti in modo da rendere semplici e leggibili le espressioni analitiche e, volutamente, non si porrà attenzione alla validità nei punti di discontinuità di uguaglianze analoghe alla (1.39).



Un impulso della stessa durata, di ampiezza  $A$  e che inizi nell'origine, può essere scritto come segue:

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ A & \text{per } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{per } t > \tau \end{cases} \quad (1.41)$$

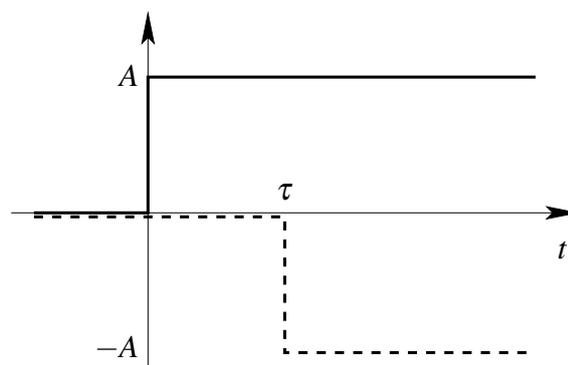


e può essere espresso in termini di impulso rettangolare ovvero di  $\text{rect}(\cdot)$ :

$$s(t) = A G_{\tau}(t - \tau/2) = A \text{rect}\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right) = A \text{rect}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2}\right) \quad (1.42)$$

oppure può essere espresso come differenza di opportuni gradini traslati:

$$s(t) = A[u(t) - u(t - \tau)] \quad (1.43)$$

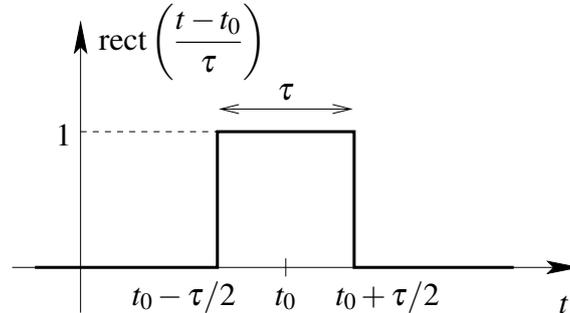


Consideriamo  $s(t) = \text{rect}(t/\tau)$ ; si tratta di un segnale di energia:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1^2 dt = \tau < +\infty \quad (1.44)$$

Si ottiene lo stesso risultato se si considera lo stesso segnale ritardato di  $t_0$ :

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) \quad (1.45)$$



dato che una traslazione dell'asse dei tempi non modifica l'energia di un segnale. A questo punto, ci aspettiamo che l'energia di

$$s(t) = A \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right) = \begin{cases} A & \text{per } t_0 - \tau/2 \leq t \leq t_0 + \tau/2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (1.46)$$

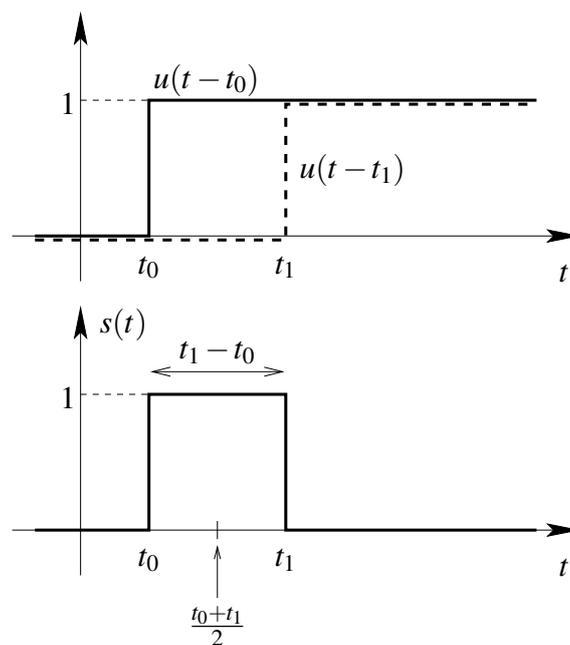
sia pari ad  $A^2\tau$ ; infatti:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{t_0 - \tau/2}^{t_0 + \tau/2} A^2 dt = A^2\tau \quad (1.47)$$

Evidentemente, i segnali impulsivi in questione hanno potenza nulla, quindi non sono segnali di potenza.

Esprimiamo un segnale rettangolare non nullo da  $t_0$  a  $t_1$  come differenza tra due opportuni segnali a gradino:

$$s(t) = u(t-t_0) - u(t-t_1) \quad , \quad t_1 > t_0 \quad (1.48)$$



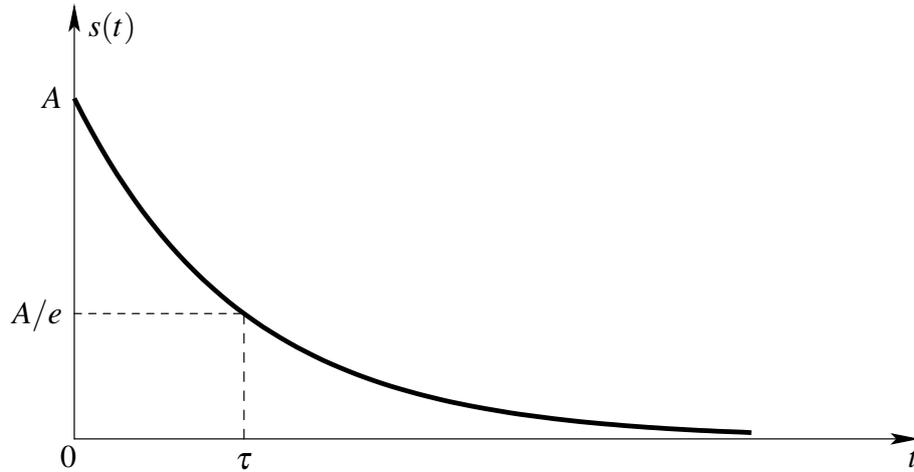
Come si vede dalla figura, si può scrivere che

$$s(t) = \text{rect} \left( \frac{t - \frac{t_0+t_1}{2}}{t_1 - t_0} \right) \quad (1.49)$$

4. Esponenziale unilatero decrescente:  $s(t) = A e^{-t/\tau} u(t)$ ,  $A, \tau \in \mathbb{R}^+$ ; il prodotto per  $u(t)$  corrisponde a considerare l'andamento dell'esponenziale solo per  $t > 0$ .

Si ha

$$s(\tau) = A e^{-\tau/\tau} u(\tau) = A e^{-1} \cdot 1 = A/e \quad (1.50)$$



L'inverso della costante  $\tau$  è una misura della rapidità di decadimento del segnale: valori più piccoli di  $\tau$  corrispondono a un decadimento più rapido, mentre valori di  $\tau$  più grandi corrispondono a un decadimento più lento.

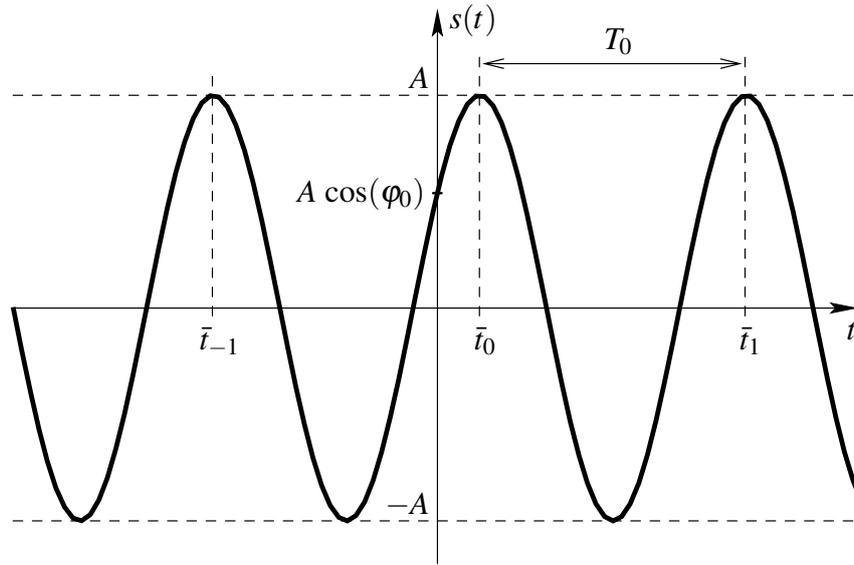
$$\begin{aligned} E_s(T) &= \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_0^{T/2} (A e^{-t/\tau})^2 dt = \int_0^{T/2} A^2 e^{-2t/\tau} dt = A^2 \cdot \frac{-\tau}{2} e^{-2t/\tau} \Big|_0^{T/2} \\ &= -\frac{A^2 \tau}{2} \left( e^{-\frac{2}{\tau} \cdot \frac{T}{2}} - e^{-0} \right) = -\frac{A^2 \tau}{2} \underbrace{\left( e^{-T/\tau} - 1 \right)}_{<1} = \frac{A^2 \tau}{2} (1 - e^{-T/\tau}) \end{aligned} \quad (1.51)$$

$$E_s = \lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T) = \frac{A^2 \tau}{2} - \frac{A^2 \tau}{2} \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-T/\tau}}_{=0} = \frac{A^2 \tau}{2} \quad (1.52)$$

Quindi si tratta di un segnale di energia, anche se di durata illimitata. Ovviamente, si ha  $P_s = 0$ . Dimensionalmente i conti tornano, perché  $A^2$  è una tensione al quadrato e  $\tau$  è un tempo. I segnali rettangolari visti e l'esponenziale unilatero rientrano nella categoria delle funzioni impulsive.

5. Segnale armonico reale:  $s(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ , con  $T_0 = 1/f_0$ , e dove  $\varphi_0$  è una fase iniziale. Si ha

$$s(0) = A \cos(2\pi f_0 \cdot 0 + \varphi_0) = A \cos(\varphi_0) \quad (1.53)$$



Dalla figura si deduce che

$$2\pi f_0 \bar{t}_k + \varphi_0 = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad \bar{t}_0 = -\frac{\varphi_0}{2\pi f_0} = -\frac{\varphi_0}{2\pi} \cdot T_0 \quad (1.54)$$

Ad esempio, per  $\varphi_0 = -\pi/2$ , si ha  $\bar{t}_0 = T_0/4$  e  $s(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$ .

La periodicit  di  $s(t)$  pu  essere dimostrata in modo completamente analogo a come   stato fatto per  $\varphi_0 = 0$  nella sezione in cui sono stati introdotti i segnali periodici.

Evidentemente si tratta anche di un segnale alternativo, di conseguenza il suo valor medio   nullo:

$$\begin{aligned} s_m &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt = \frac{1}{T_0} A \frac{1}{2\pi f_0} \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \Big|_0^{T_0} \\ &= \frac{A}{2\pi} [\sin(2\pi + \varphi_0) - \sin(\varphi_0)] = \frac{A}{2\pi} [\sin(\varphi_0) - \sin(\varphi_0)] = 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Calcoliamo la potenza media di  $s(t)$ :

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \frac{A^2}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(2\pi f_0 t + \varphi_0) dt \\ &= \frac{A^2}{T_0} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \{1 + \cos[2 \cdot (2\pi f_0 t + \varphi_0)]\} dt = \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} dt + \frac{A^2}{2T_0} \int_0^{T_0} \cos[2 \cdot (2\pi f_0 t + \varphi_0)] dt \\ &= \frac{A^2}{2T_0} \cdot T_0 + \frac{A^2}{2T_0} \cdot 0 = \frac{A^2}{2} \end{aligned} \quad (1.56)$$

Si osserva che si ottiene la stessa potenza media (e quindi anche lo stesso valore efficace) ottenuti per  $\varphi_0 = 0$ ; in effetti,  $\varphi_0$  introduce semplicemente una traslazione sull'asse dei tempi, che non modifica la potenza media del segnale; infatti, l'espressione di quest'ultima non contiene alcuna dipendenza da  $\varphi_0$ .

6. Segnale armonico complesso:  $s(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) + j A \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ , con  $T_0 = 1/f_0$ .

Questa è la generalizzazione al caso complesso della funzione armonica. È un segnale di periodo  $T_0$ :

$$\begin{aligned} s(t + T_0) &= A e^{j[2\pi f_0(t+T_0) + \varphi_0]} = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} \cdot e^{j2\pi f_0 T_0} = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} \cdot \underbrace{e^{j2\pi}}_{=1} \\ &= A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} = s(t) \end{aligned} \quad (1.57)$$

La sua periodicità si può osservare anche considerando la periodicità delle sue parti reale e immaginaria:

$$s(t) = A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)} = \underbrace{A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)}_{s_R(t)} + j \underbrace{A \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0)}_{s_I(t)} \quad (1.58)$$

Calcoliamone la potenza media:

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |A e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} |A|^2 \cdot \underbrace{|e^{j(2\pi f_0 t + \varphi_0)}|^2}_{=1} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} A^2 dt = \frac{1}{T_0} \cdot A^2 \cdot T_0 = A^2 \end{aligned} \quad (1.59)$$

Abbiamo ottenuto un valore finito e non nullo, quindi si tratta di un segnale di potenza.

Si nota che la potenza media è doppia rispetto all'esempio precedente; in effetti, la potenza media complessiva è la somma delle potenze medie delle parti reale e immaginaria; la parte reale ha la stessa potenza media calcolata nell'esempio precedente; la parte immaginaria è uguale alla parte reale, a meno di uno sfasamento di  $\pi/2$ , ovvero di una traslazione, quindi ha la stessa potenza media della parte reale; in sintesi:

$$P_{s_R} = \frac{A^2}{2}, \quad P_{s_I} = P_{s_R} = \frac{A^2}{2}, \quad P_s = P_{s_R} + P_{s_I} = 2P_{s_R} = A^2 \quad (1.60)$$

7. Treno di impulsi.

A partire da un segnale impulsivo  $s(t)$ , si può ottenere un segnale  $s_p(t)$  periodico per costruzione, sommando infinite repliche traslate di multipli interi di quello che si vuole che sia il periodo risultante:

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT_0) \quad (1.61)$$

Verifichiamo la periodicità:

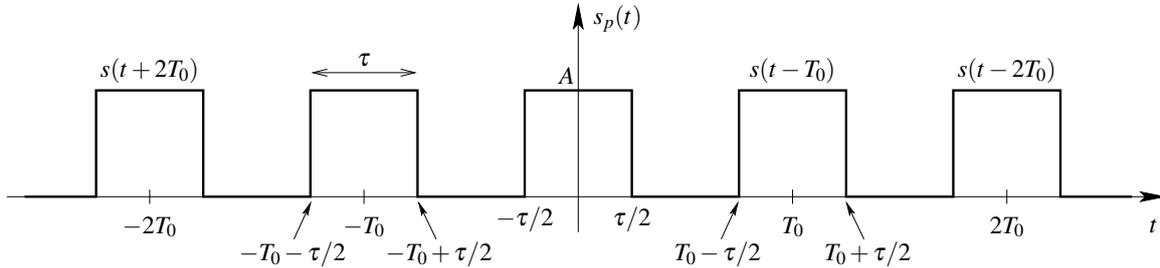
$$s_p(t + T_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t + T_0 - kT_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - (k-1)T_0) \stackrel{k'=k-1}{=} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} s(t - k'T_0) = s_p(t) \quad (1.62)$$

Il segnale periodico risultante non è altro che una ripetizione di un impulso limitato nel tempo, quindi si può scrivere che

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t - kT_0) \triangleq \text{rep}_{T_0} s(t) \quad (1.63)$$

Il periodo  $T_0$  può essere stabilito arbitrariamente.

La seguente figura illustra il caso in cui  $s(t) = A \text{rect}(t/\tau)$  sia un segnale rettangolare con  $\tau < T_0$ .



In particolare, in questo caso si ha

$$s_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \text{rect}\left(\frac{t - kT_0}{\tau}\right) \quad (1.64)$$

Poiché il segnale è periodico, se ne può calcolare la potenza come segue:

$$P_{s_p} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s_p(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} |s(t)|^2 dt = \frac{A^2 \tau}{T_0} = \frac{E_s}{T_0} \quad (1.65)$$

8. Rampa:  $s(t) = t$ . Si ha:

$$E_s(T) = \int_{-T/2}^{T/2} |s(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_{-T/2}^{T/2} = \frac{T^3/8}{3} - \frac{-T^3/8}{3} = \frac{2T^3}{8 \cdot 3} = \frac{T^3}{12} \quad (1.66)$$

$$E_s = \lim_{T \rightarrow \infty} E_s(T) = \infty \quad (1.67)$$

quindi non si tratta di un segnale di energia. Inoltre si ha:

$$P_s(T) = \frac{E_s(T)}{T} = \frac{T^2}{12} \Rightarrow P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} P_s(T) = \infty \quad (1.68)$$

quindi non si tratta neanche di un segnale di potenza.

È facile convincersi che anche qualunque altra retta con pendenza non nulla corrisponde a un segnale non di energia e non di potenza.

**Nota** – I segnali presentati sono utili nelle approssimazioni dei segnali che si osservano in realtà:

- esponenziale: decadimento di segnali;
- gradino: transitorio iniziale molto ripido;
- periodico: non è a durata infinita, ma si ripete un numero molto grande di volte all'interno dell'intervallo in cui si considera la risposta di un sistema, cosicché quest'ultima può essere considerata la risposta a regime.

## Capitolo 2

# Rappresentazione nello spazio dei segnali

Dopo aver introdotto il concetto di segnale e aver operato una prima classificazione degli stessi, ci poniamo il problema della loro rappresentazione. Analogamente a quanto riscontrabile con gli spazi vettoriali nell'ambito dell'Algebra Lineare, lo scopo è quello di dotarsi di strumenti operativi opportuni e di fare in modo che dalla rappresentazione stessa emergano delle proprietà dei segnali di interesse applicativo. La trattazione che segue si propone di considerare, per i segnali continui, il problema in termini generali in riferimento a un generico intervallo temporale  $[t_1, t_2]$ . Rappresentazioni specifiche, come quella di Fourier per i segnali periodici, verranno presentate come un caso particolare dell'approccio qui proposto.

In accordo con quanto sopra, il primo passo consiste nel definire l'operatore *prodotto interno* (o scalare) e il concetto di *base di segnali*.

- Dati due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ , si definisce il loro prodotto interno nel modo seguente:

$$(x, y) = \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \quad . \quad (2.1)$$

Tale definizione è concorde dimensionalmente con la definizione di energia di un segnale e, infatti,  $(x, x)$  rappresenta l'energia del segnale  $x(t)$  nell'intervallo  $[t_1, t_2]$ . Dunque, il prodotto interno può essere interpretato come una sorta di "affinità" energetica tra segnali. Inoltre, data la struttura dell'operatore, risultano evidenti due importanti proprietà:

1. poiché l'integrale è un operatore lineare, il prodotto interno gode della proprietà distributiva, cioè  $(x, \sum_{n=1}^N y_n) = \sum_{n=1}^N (x, y_n)$ ;
2. il prodotto interno non gode della proprietà commutativa, ma risulta evidentemente

$$(y, x) = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x^*(t) dt = \left( \int_{t_1}^{t_2} x(t) y^*(t) dt \right)^* = (x, y)^* \quad . \quad (2.2)$$

- Una base di segnali è un insieme di segnali (possibilmente elementari e con opportune caratteristiche)  $\{\phi_n(t)\}_{n \in I}$ , con  $I \subset \mathbb{Z}$ , rispetto al quale si intende rappresentare un generico segnale  $s(t)$ . Agli elementi di tale base si richiede l'ortonormalità, cioè:

$$(\phi_n, \phi_m) = \begin{cases} 1 & \text{per } n = m \Rightarrow E_{\phi_n}(t_1, t_2) = 1 \\ 0 & \text{per } n \neq m \end{cases} = \delta_{nm} \quad (2.3)$$

e la base consente di individuare uno spazio dei segnali.

Si consideri una approssimazione  $\hat{s}(t)$  del segnale  $s(t)$  come combinazione lineare degli elementi della base secondo un opportuno insieme di coefficienti  $\{s_n\}_{n \in I}$ :

$$\hat{s}(t) = \sum_{n \in I} s_n \phi_n(t) \quad . \quad (2.4)$$

Se  $\hat{s}(t)$  può essere ritenuta una valida approssimazione di  $s(t)$  nel contesto considerato, l'insieme dei coefficienti  $\{s_n\}_{n \in I}$  costituisce una *rappresentazione* di  $s(t)$  nello *spazio dei segnali* individuato dalla base  $\{\phi_n(t)\}_{n \in I}$ .

La scelta della base dipende dal tipo di segnale che si considera (e.g. periodico) e dal tipo di analisi che si vuole condurre, in modo che la rappresentazione di  $s(t)$  metta in luce proprietà di interesse e/o consenta di esplicitare operazioni in un contesto applicativo. Tuttavia, indipendentemente dalla base, è possibile ricavare una espressione generale per l'insieme dei coefficienti  $s_n$ , che soddisfa un requisito di errore minimo tra il segnale  $s(t)$  e la sua approssimazione  $\hat{s}(t)$ . Su questo aspetto si concentra la presente trattazione, mentre il problema della scelta della base verrà affrontato successivamente con lo sviluppo in Serie di Fourier di segnali periodici.

Dunque, siano dati un segnale  $s(t)$  e una opportuna base  $\{\phi_n(t)\}_{n \in I}$ . Si definisca il segnale errore  $e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$  e si denoti con  $c_n$  il prodotto interno tra  $s(t)$  e il generico elemento della base:

$$c_n = (s, \phi_n) = \int_{t_1}^{t_2} s(t) \phi_n^*(t) dt \quad . \quad (2.5)$$

Nell'espressione di  $\hat{s}(t)$  si intende determinare l'espressione dell'insieme di coefficienti  $\{s_n\}_{n \in I}$  che minimizza l'errore quadratico medio nell'intervallo  $[t_1, t_2)$ , ovvero l'energia del segnale errore nel medesimo intervallo:

$$E_e(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |e(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt \quad . \quad (2.6)$$

Poiché l'energia è un caso particolare di prodotto interno, si può scrivere quanto segue:

$$\begin{aligned} E_e(t_1, t_2) &= (e, e) = (s - \hat{s}, s - \hat{s}) = (s, s) - (s, \hat{s}) - (\hat{s}, s) + (\hat{s}, \hat{s}) \\ &= (s, s) - \left( s, \sum_{n \in I} s_n \phi_n \right) - \left( \sum_{n \in I} s_n \phi_n, s \right) + (\hat{s}, \hat{s}) \\ &= E_s(t_1, t_2) + E_{\hat{s}}(t_1, t_2) - \left( s, \sum_{n \in I} s_n \phi_n \right) - \left( \sum_{n \in I} s_n \phi_n, s \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.7)$$

in cui si è tenuto conto della proprietà distributiva del prodotto interno. Applicando ancora la proprietà distributiva del prodotto interno e tenendo conto che i coefficienti  $s_n$  sono delle costanti rispetto all'integrazione che definisce il prodotto interno, si ha:

$$\begin{aligned} E_e(t_1, t_2) &= E_s(t_1, t_2) + E_{\hat{s}}(t_1, t_2) - \sum_{n \in I} s_n^* (s, \phi_n) - \sum_{n \in I} s_n (\phi_n, s) \\ &= E_s(t_1, t_2) + E_{\hat{s}}(t_1, t_2) - \sum_{n \in I} s_n^* c_n - \sum_{n \in I} s_n c_n^* \quad . \end{aligned} \quad (2.8)$$

Infine, si consideri che:

$$\begin{aligned} E_{\hat{s}}(t_1, t_2) &= \left( \sum_{n \in I} s_n \phi_n, \sum_{m \in I} s_m \phi_m \right) = \sum_{n \in I} \sum_{m \in I} s_n s_m^* (\phi_n, \phi_m) \\ &= \sum_{n \in I} s_n s_n^* = \sum_{n \in I} |s_n|^2 \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

in cui si è tenuto conto della proprietà di ortonormalità della base. In definitiva risulta:

$$E_e(t_1, t_2) = E_s(t_1, t_2) + \sum_{n \in I} (|s_n|^2 - s_n^* c_n - s_n c_n^*) \quad , \quad (2.10)$$

da cui, sommando e sottraendo dal generico termine della sommatoria  $|c_n|^2$ , si ottiene:

$$E_e(t_1, t_2) = E_s(t_1, t_2) + \sum_{n \in I} |s_n - c_n|^2 - \sum_{n \in I} |c_n|^2 \quad , \quad (2.11)$$

in cui si è tenuto conto del fatto che

$$|s_n - c_n|^2 = (s_n - c_n)(s_n - c_n)^* = |s_n|^2 - s_n^* c_n - s_n c_n^* + |c_n|^2 \quad . \quad (2.12)$$

Poiché al secondo membro della (2.11) l'unico termine che dipende dal generico coefficiente  $s_n$  è il secondo e considerando che tale termine dà un contributo positivo all'errore, la soluzione che minimizza  $E_e(t_1, t_2)$  è evidentemente

$$s_n = c_n \quad , \quad (2.13)$$

in corrispondenza della quale si ottiene

$$E_{e, \min}(t_1, t_2) = E_s(t_1, t_2) - \sum_{n \in I} |c_n|^2 = E_s(t_1, t_2) - \sum_{n \in I} |s_n|^2 \quad . \quad (2.14)$$

Alla luce del presente risultato è possibile trarre alcune considerazioni.

1. L'espressione del coefficiente  $s_n$  che minimizza l'energia dell'errore e che risulta ottima secondo il relativo criterio coincide con il prodotto interno tra il segnale e il relativo elemento  $\phi_n(t)$  della base di segnali.
2.  $E_{e, \min}(t_1, t_2)$  è una funzione non crescente del numero degli elementi della base, come risulta evidente dalla (2.14). Se è possibile determinare un numero di elementi, anche infinito, per cui  $E_{e, \min}(t_1, t_2) \rightarrow 0$ , la base di segnali si dice *completa*. Una immediata conseguenza di ciò è che dalla (2.14) l'energia del segnale può essere espressa come segue:

$$E_s(t_1, t_2) = \sum_{n \in I} |s_n|^2 \quad . \quad (2.15)$$

La (2.15) rappresenta l'espressione generale dell'Uguaglianza di Parseval.

3. È possibile osservare che, con la scelta ottima  $s_n = c_n$ , risulta  $(e, \hat{s}) = 0$ , cioè il segnale errore è ortogonale alla approssimazione del segnale  $s(t)$ . Infatti:

$$(e, \phi_n) = \left( s - \sum_{m \in I} c_m \phi_m, \phi_n \right) = (s, \phi_n) - \sum_{m \in I} c_m (\phi_m, \phi_n) = c_n - \sum_{m \in I} c_m \delta_{mn} = c_n - c_n = 0 \quad . \quad (2.16)$$

Dalla ortogonalità tra  $e(t)$  e il generico  $\phi_n(t)$  consegue l'ortogonalità tra  $e(t)$  e qualunque combinazione lineare degli elementi della base e, dunque, anche tra  $e(t)$  e  $\hat{s}(t)$ .

## 2.1 Segnali continui periodici

Supponiamo che  $s(t)$  sia periodico di periodo  $T_0$ . Innanzi tutto bisogna scegliere opportunamente la base di segnali:

1. scegliamo l'intervallo  $(t_1, t_2)$  pari al periodo:  $[t_1, t_2) \equiv [\bar{t}, \bar{t} + T_0)$ ;
2. gli elementi della base vengono scelti periodici di periodo  $T_0$  o sottomultiplo di  $T_0$ .

Come segnale periodico consideriamo il segnale armonico complesso

$$\phi_n(t) = e^{j2\pi n t / T_0} \quad , \quad f_0 = 1/T_0 \quad , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (I \equiv \mathbb{Z}) \quad (2.17)$$

Se le funzioni sono di questa specie, l'insieme  $\{\phi_n(t)\}_{n \in I}$  è chiamato *base di Fourier*.

## 2.2 Proprietà della base di Fourier

1.  $\phi_n(t)$  è periodico di periodo  $T_0/n$ , sottomultiplo di  $T_0$ :

$$\phi_n(t + T_0/n) = e^{j2\pi n(t+T_0/n)/T_0} = e^{j2\pi n t / T_0} \cdot e^{j2\pi n T_0 / (n T_0)} = \phi_n(t) \quad (2.18)$$

In particolare,  $\phi_n(t + T_0) = \phi_n(t)$ , dove  $T_0$  è il periodo fondamentale, ovvero il periodo di  $\phi_1(t) = e^{j2\pi t / T_0}$  e di  $\phi_{-1}(t) = e^{-j2\pi t / T_0}$

- 2.

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \phi_n(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq 0 \\ T_0 & \text{per } n = 0 \end{cases} = T_0 \delta_{n0} \quad (2.19)$$

infatti

$$\begin{aligned} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \phi_n(t) dt &= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} e^{j2\pi n t / T_0} dt \\ &= \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \cos(2\pi n t / (T_0/n)) dt + j \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \sin(2\pi n t / (T_0/n)) dt = 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

e, per  $n \neq 0$ , entrambi gli integrandi del penultimo membro hanno valor medio nullo. Se invece poniamo  $n = 0$ , otteniamo la componente continua del segnale.

3.  $\phi_n(t)$  e  $\phi_m(t)$  sono *ortonormali*. Diamo una definizione di prodotto interno riferita al fatto che i segnali periodici sono di potenza. Si definisce il prodotto interno per i segnali periodici:

$$(\phi_n, \phi_m) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \phi_n(t) \phi_m^*(t) dt \quad (2.21)$$

in cui l'integrale è normalizzato alla durata del periodo, così da rendere il prodotto interno coerente con la natura energetica del segnale (segnale di potenza). Si ha

$$\begin{aligned} (\phi_n, \phi_m) &= \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} e^{j2\pi n t / T_0} e^{-j2\pi m t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} e^{j2\pi(n-m)t / T_0} dt \\ &= \begin{cases} 1 & \text{per } n = m \\ 0 & \text{per } n \neq m \end{cases} = \delta_{nm} \end{aligned} \quad (2.22)$$

quindi  $\{\phi_n(t)\}_{n \in I}$  è una *base ortonormale*.

Detto ciò, possiamo procedere affermando che:

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/T_0} \quad (2.23)$$

dove

$$c_n = (s, \phi_n) = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) \cdot \phi_n^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.24)$$

Si ha

$$\int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt = 0 \quad (2.25)$$

se  $s(t)$  è a potenza media finita, cioè se

$$\frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} |s(t)|^2 dt < +\infty \quad (2.26)$$

A questo punto, i valori di  $t$  per i quali  $s(t)$  e  $\hat{s}(t)$  possono differire costituiscono un insieme di misura nulla.

## 2.3 Criterio di Dirichlet

Il *criterio di Dirichlet* dice che

$$s(t) = \hat{s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j2\pi nt/T_0} \quad , \quad \text{con } s_n = (s, \phi_n) \quad (2.27)$$

cioè che la serie in questione converge a  $s(t)$  se sono soddisfatte le seguenti ipotesi:

- $s(t)$  è continuo, con al più un numero finito di discontinuità di prima specie in  $[\bar{t}, \bar{t} + T_0)$ ;
- $s(t)$  è derivabile e, laddove non lo è, esistono finite le derivate destra e sinistra;
- $s(t)$  ha potenza media finita.

Se tali ipotesi sono soddisfatte, nei punti di discontinuità di  $s(t)$  la serie di Fourier converge alla semisomma del limite destro e del limite sinistro.

## 2.4 Teorema di Parseval per segnali continui periodici

$$P_s = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} |s(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |s_n|^2 \quad (2.28)$$

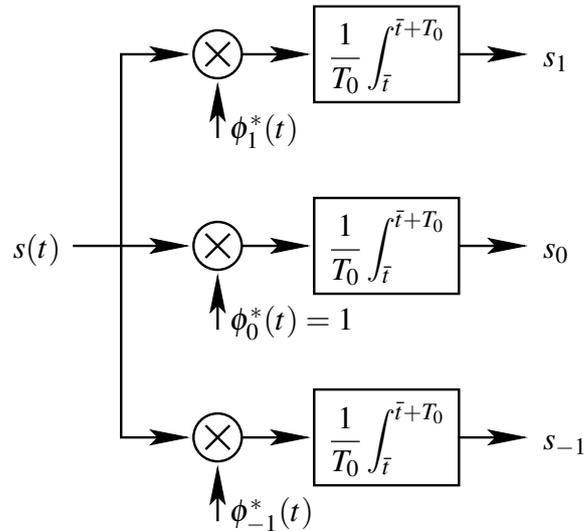
Dato  $s(t)$  con le ipotesi viste precedentemente,

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j2\pi nt/T_0} \quad \Rightarrow \quad s_n = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.29)$$

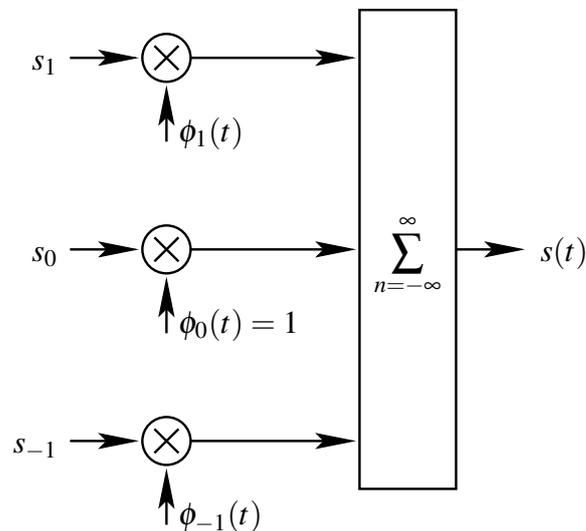
Dato  $T_0$ , si sceglie la base di Fourier (specificando il valore di  $T_0$  in  $\phi_n(t)$ ) e si determina, al variare di  $n$ , la sequenza dei coefficienti  $c_n$ , che, per  $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , costituisce una rappresentazione equivalente di  $s(t)$ ; tale sequenza è assimilabile a un segnale discreto:

$$s(t) \Leftrightarrow s_n \quad (2.30)$$

Schema a blocchi di analisi del segnale  $s(t)$

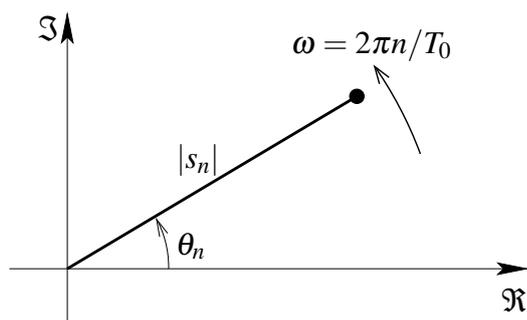


Schema a blocchi di sintesi del segnale  $s(t)$



## 2.5 Ampiezza e fase dei coefficienti di Fourier

$s_n$  è un numero complesso, quindi può essere scritto con la notazione di Eulero:  $s_n = |s_n|e^{j\theta_n}$ , dove  $\theta_n = \arg\{s_n\}$ .



Man mano che  $n$  aumenta, si ottengono vettori che “ruotano” a velocità sempre maggiore. Sviluppo di Fourier di  $s(t)$  in componenti armoniche complesse:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j2\pi n t / T_0} \quad (2.31)$$

Si ha

$$s_n = |s_n| e^{j\theta_n} = R_n + jI_n \quad (2.32)$$

quindi

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_n + jI_n] [\cos(2\pi n t / T_0) + j \sin(2\pi n t / T_0)] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_n \cos(2\pi n t / T_0) - I_n \sin(2\pi n t / T_0)] + j \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_n \sin(2\pi n t / T_0) + I_n \cos(2\pi n t / T_0)] \end{aligned} \quad (2.33)$$

Questo è chiamato *sviluppo di Fourier di  $s(t)$  in termini di  $\sin(\cdot)$  e  $\cos(\cdot)$*  (cioè in termini di componenti armoniche reali), o anche *espansione in serie bilatera* in seno e coseno.

Ora caratterizziamo un segnale  $s(t)$  reale. Sappiamo che

$$s_n = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt \quad (2.34)$$

ne prendiamo il coniugato:

$$s_n^* = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{j2\pi n t / T_0} dt = s_{-n} \quad (2.35)$$

deduciamo che  $s_n = s_{-n}^*$ , proprietà che corrisponde alla cosiddetta *simmetria hermitiana*. Ora ragioniamo su modulo e fase degli  $s_n$ :

$$s_{-n} = |s_{-n}| e^{j\theta_{-n}} = R_{-n} + jI_{-n} = s_n^* = |s_n| e^{-j\theta_n} = R_n - jI_n \quad (2.36)$$

quindi si ha

$$|s_{-n}| = |s_n| \quad , \quad \theta_{-n} = -\theta_n \quad (2.37)$$

cioè il modulo è una funzione pari dell'indice  $n$ , mentre la fase è una funzione dispari dello stesso indice; inoltre

$$R_n = R_{-n} \quad , \quad I_n = -I_{-n} \quad (2.38)$$

cioè la parte reale è una funzione pari dell'indice  $n$ , mentre la parte immaginaria è una funzione dispari dello stesso indice. Ora consideriamo il caso di segnale reale con riferimento all'espansione in serie bilatera; si ha:

$$R_n \sin(2\pi n t / T_0) + R_{-n} \sin(2\pi(-n)t / T_0) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (2.39)$$

$$I_n \cos(2\pi n t / T_0) + I_{-n} \sin(-2\pi n t / T_0) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (2.40)$$

Vediamo che cosa succede per  $n = 0$ . Sappiamo che:

$$s_0 = (s, \phi_0) = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) dt = R_0 \quad (2.41)$$

Per un segnale reale,  $R_0 \neq 0$  se il segnale non ha valor medio nullo, mentre  $I_0 = 0$ , cosicché

$$R_0 \sin(0) + I_0 \cos(0) = 0 \quad (2.42)$$

quindi in questo caso l'espansione in serie diventa pari a:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_n \cos(2\pi n t / T_0) - I_n \sin(2\pi n t / T_0)] \quad (2.43)$$

quest'ultima serie è *bilatera e reale*.

Vogliamo passare alla *serie unilatera reale*. Per rendere la serie unilatera, consideriamo che:

$$R_n = R_{-n} \quad \Rightarrow \quad R_n \cos(2\pi n t / T_0) + R_{-n} \cos(-2\pi n t / T_0) = 2R_n \cos(2\pi n t / T_0) \quad (2.44)$$

$$I_n = -I_{-n} \quad \Rightarrow \quad I_n \sin(2\pi n t / T_0) + I_{-n} \sin(-2\pi n t / T_0) = 2I_n \sin(2\pi n t / T_0) \quad (2.45)$$

Quindi:

$$s(t) = R_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [R_n \cos(2\pi n t / T_0) - I_n \sin(2\pi n t / T_0)] \quad (2.46)$$

questa è appunto l'espansione in serie unilatera in seno e coseno.

Ora vogliamo trovare una simmetria per poter ridurre l'espressione a soli coseni. Sfruttiamo la simmetria Hermitiana. Per ogni  $n \neq 0$ , si ha

$$\begin{aligned} & s_n e^{j2\pi n t / T_0} + s_{-n} e^{-j2\pi n t / T_0} \\ &= |s_n| e^{j\theta_n} e^{j2\pi n t / T_0} + |s_{-n}| e^{j\theta_{-n}} e^{-j2\pi n t / T_0} = |s_n| e^{j\theta_n} e^{j2\pi n t / T_0} + |s_n| e^{-j\theta_n} e^{-j2\pi n t / T_0} \\ &= |s_n| \cdot \left[ e^{j(2\pi n t / T_0 + \theta_n)} + e^{-j(2\pi n t / T_0 + \theta_n)} \right] = 2|s_n| \cos(2\pi n t / T_0 + \theta_n) \end{aligned} \quad (2.47)$$

mentre per  $n = 0$  si ha  $s_0 = R_0$ . Quindi si ha l'espansione in serie unilatera in soli coseni:

$$s(t) = s_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| \cos(2\pi n t / T_0 + \theta_n) \quad (2.48)$$

Quest'ultima è un'espansione di  $s(t)$  in funzioni armoniche reali.

A questo punto, cerchiamo di dare una interpretazione dei risultati ottenuti.

1.  $s(t) \Leftrightarrow s_n$ , quindi  $s_n$  è una rappresentazione equivalente di  $s(t)$ .
2. Il generico coefficiente  $s_n$  fornisce  $|s_n|$  e  $\theta_n$ , cioè l'ampiezza e la fase della generica componente armonica reale, con cui
  - ricostruiamo  $s(t)$  (sintesi);
  - sviluppiamo  $s(t)$  (analisi).

Questo permette di evidenziare il peso di ciascuna armonica.

- $s_0$ : valore medio di  $s(t)$ .
- $2|s_1| \cos(2\pi t/T_0 + \theta_1)$ : **prima armonica** o **fondamentale** dello sviluppo di  $s(t)$ ; ha periodo identico a quello di  $s(t)$ .
- $2|s_n| \cos(2\pi n t/T_0 + \theta_n)$ :  **$n$ -esima armonica** dello sviluppo di  $s(t)$ ; ha periodo pari a  $T_0/n$ .

L'armonica di ordine  $n$  ha una frequenza di oscillazione pari a  $n$  volte quella della fondamentale. L'indice  $n$  è associabile alla frequenza dell'armonica a cui è relativo.  $s_n$  non è altro che una rappresentazione nel dominio della frequenza in ampiezza e fase.

**Esempio:** se  $T_0 = 1$  ms, si ha  $f_0 = 1$  kHz,  $2f_0 = 2$  kHz,  $nf_0 = n$  kHz.

In realtà, la sequenza dei coefficienti  $s_n$  è una funzione della frequenza e, quindi, costituisce una rappresentazione di  $s(t)$  nel dominio della frequenza:

- $s_n$ : trasformata-serie di Fourier di  $s(t)$ ;
- $s(t)$ : antitrasformata-serie di Fourier di  $s_n$ .

Il tutto può essere indicato schematicamente come

$$s(t) \xLeftrightarrow{\text{TSF}} s_n \quad (2.49)$$

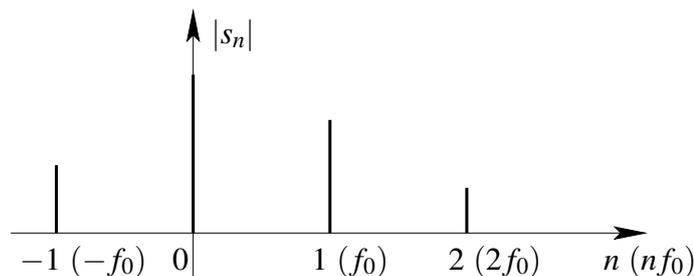
Inoltre si denota  $s_n = \mathcal{F}_s\{s(t)\}$ ,  $s(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\{s_n\}$ , dove

$$s_n = \mathcal{F}_s\{s(t)\} = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{-j2\pi n t/T_0} dt \quad (2.50)$$

$$s(t) = \mathcal{F}_s^{-1}\{s_n\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j2\pi n t/T_0} \quad (2.51)$$

**Definizione di trasformata:** una trasformata è una funzione in un dominio coniugato, dove la frequenza è il dominio coniugato del tempo nel nostro caso specifico.

L'insieme dei coefficienti  $s_n$  rappresenta lo **spettro** di  $s(t)$  e dà un'idea del contenuto informativo in frequenza del segnale;  $|s_n|$  corrisponde allo **spettro di ampiezza**, mentre  $\theta_n$  corrisponde allo **spettro di fase**.



I moduli  $|s_n|$  indicano il peso delle varie armoniche nello sviluppo di  $s(t)$ . Si può interpretare  $s_n$  anche come un segnale discreto nel dominio della frequenza. Si osserva anche che, in generale, un segnale periodico è costituito da infinite armoniche, corrispondenti agli  $s_n$ .

**Esempio:** si vuole trovare la TSF del segnale  $s(t) = A \cos(2\pi\bar{f}t + \varphi)$ , dove  $A, \bar{f} \in \mathbb{R}^+$  e  $\varphi \in \mathbb{R}$ .

$s(t)$  è un segnale reale, periodico di periodo  $T_0 = 1/\bar{f}$ ; lo si può sviluppare in serie come segue:

$$s(t) = s_0 + \sum_{n=1}^{\infty} |s_n| \cos(2\pi n t / T_0 + \varphi_n) \quad (2.52)$$

Il segnale in questione ha uno sviluppo rappresentato dalla sola armonica fondamentale:

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{1}{2} \left[ A e^{j(2\pi\bar{f}t + \varphi)} + A e^{-j(2\pi\bar{f}t + \varphi)} \right] = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi\bar{f}t} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi\bar{f}t} \\ &= \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j2\pi t / T_0} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j2\pi t / T_0} \end{aligned} \quad (2.53)$$

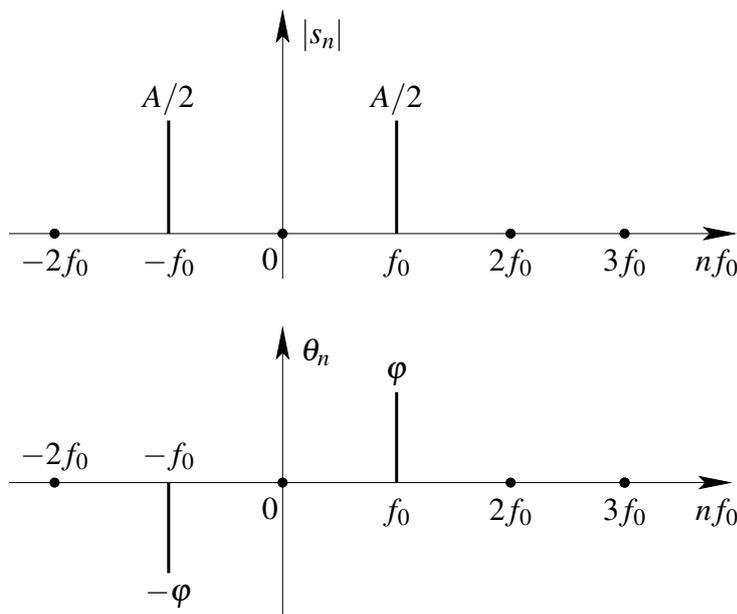
Da quest'ultima espressione deduciamo che

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_n e^{j2\pi n t / T_0} \quad (2.54)$$

se poniamo:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq \pm 1 \\ \frac{A}{2} e^{j\varphi} & \text{per } n = 1 \\ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} & \text{per } n = -1 \end{cases} \Rightarrow |s_n| = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq \pm 1 \\ \frac{A}{2} & \text{per } n = \pm 1 \end{cases}, \quad \theta_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq \pm 1 \\ \varphi & \text{per } n = 1 \\ -\varphi & \text{per } n = -1 \end{cases} \quad (2.55)$$

Da queste ultime espressioni risulta che lo spettro di ampiezza è pari, mentre lo spettro di fase è dispari.



## 2.6 Prime proprietà della Trasformata Serie di Fourier

### 2.6.1 Linearità

Siano dati i seguenti segnali periodici che ammettono la trasformata serie di Fourier:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} X_n \quad (2.56)$$

$$y(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} Y_n \quad (2.57)$$

Inoltre si supponga che i due segnali abbiano lo stesso periodo  $T_0$ . Allora la TSF del segnale somma sarà data da:

$$z(t) = x(t) + y(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} Z_n = X_n + Y_n \quad (2.58)$$

$$Z_n = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} [x(t) + y(t)] e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.59)$$

Osserviamo che:

$$z(t + T_0) = x(t + T_0) + y(t + T_0) = z(t) = x(t) + y(t) \quad (2.60)$$

quindi anche il segnale somma sarà periodico dello stesso periodo di  $x(t)$  e  $y(t)$ . Inoltre tale proprietà è generalizzabile al caso di una combinazione lineare dei segnali  $x(t)$  e  $y(t)$ .

Ora esaminiamo il caso in cui  $x(t)$  e  $y(t)$  hanno periodi diversi e rispettivamente pari a  $T_0'$  e  $T_0''$ . In questo caso, affinché anche  $z(t)$  sia periodico è necessario che:

$$T_0'' = KT_0' \quad , \quad K \in \mathbb{Q} \quad (2.61)$$

dove  $\mathbb{Q}$  è l'insieme dei numeri razionali, che possono essere scritti come rapporto tra due interi.

**AGGIUNGERE CHE IN TAL CASO IL PERIODO DI  $z(t)$  È IL MINIMO COMUNE MULTIPLO DEI DUE PERIODI...**

### 2.6.2 Simmetria pari

Supponiamo che  $s(t)$  sia un segnale pari, cioè che  $s(t) = s(-t)$ .

$$s_n = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.62)$$

Effettuando il cambiamento di variabile  $t' = -t$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-(\bar{t}+T_0)}^{-\bar{t}} s(-t') e^{j2\pi nt'/T_0} dt' = \frac{1}{T_0} \int_{-(\bar{t}+T_0)}^{-\bar{t}} \underbrace{s(-t')}_{\text{pari}} e^{-j2\pi(-n)t'/T_0} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-(\bar{t}+T_0)}^{-\bar{t}} s(t') e^{-j2\pi(-n)t'/T_0} dt' = s_{-n} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Quindi, se  $s(t)$  è pari, la sua trasformata serie è una funzione pari di  $n$ , cioè si ha  $s_n = s_{-n}$ .

### 2.6.3 Simmetria dispari

Ora supponiamo che  $s(t)$  sia dispari, cioè che  $s(t) = -s(-t)$ . Ripercorrendo i passaggi della (2.63) otteniamo:

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{T_0} \int_{-(\bar{t}+T_0)}^{-\bar{t}} \underbrace{s(-t')}_{\text{dispari}} e^{-j2\pi(-n)t'/T_0} dt' \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-(\bar{t}+T_0)}^{-\bar{t}} -s(t') e^{-j2\pi(-n)t'/T_0} dt' = -\frac{1}{T_0} \int_{-(\bar{t}+T_0)}^{-\bar{t}} s(t') e^{-j2\pi(-n)t'/T_0} dt' = -s_{-n} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Quindi, se  $s(t)$  è dispari, la sua trasformata serie è anch'essa dispari, cioè si ha  $s_n = -s_{-n}$ .

### 2.6.4 Segnale reale e pari

Consideriamo un segnale  $s(t)$  reale e pari; per esso valgono le seguenti proprietà:

- $s(t)$  reale  $\Rightarrow s_{-n} = s_n^*$
- $s(t)$  pari  $\Rightarrow s_n = s_{-n}$

quindi possiamo affermare anche che  $s_n = s_n^*$ , cioè la trasformata serie di un segnale reale e pari è anch'essa reale e pari.

### 2.6.5 Segnale reale e dispari

Consideriamo un segnale  $s(t)$  reale e dispari; per esso valgono le seguenti proprietà:

- $s(t)$  reale  $\Rightarrow s_{-n} = s_n^*$
- $s(t)$  pari  $\Rightarrow s_n = -s_{-n}$

quindi possiamo affermare anche che  $s_n = -s_n^*$ , cioè i coefficienti  $s_n$  sono immaginari, cosicché la trasformata serie di un segnale reale e dispari è immaginaria e dispari.

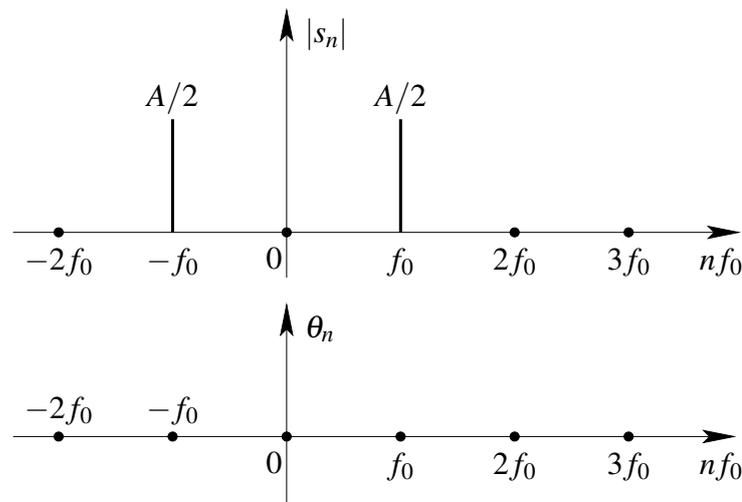
#### Esempio

Il segnale

$$s(t) = A \cos(2\pi \bar{f}t + \varphi)$$

è reale e pari se  $\varphi = 0$ . Dal caso generale si ricava che:

$$s_n = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq \pm 1 \\ \frac{A}{2} e^{j\varphi} & \text{per } n = 1 \\ \frac{A}{2} e^{-j\varphi} & \text{per } n = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq \pm 1 \\ \frac{A}{2} e^{j0} & \text{per } n = 1 \\ \frac{A}{2} e^{-j0} & \text{per } n = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq \pm 1 \\ \frac{A}{2} & \text{per } n = 1 \\ \frac{A}{2} & \text{per } n = -1 \end{cases} \quad (2.65)$$



Lo spettro di fase risultante è nullo per ogni  $n$ . La  $f_0$  riportata nei grafici coincide con  $\bar{f}$ .

### 2.6.6 Inversione dell'asse dei tempi

Dato il segnale:

$$s(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_n \quad (2.66)$$

si consideri la seguente inversione dell'asse dei tempi:

$$s_1(t) = s(-t) \quad (2.67)$$

si dimostra che:

$$s(-t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_{1,n} = S_{-n} \quad (2.68)$$

quindi un ribaltamento nel tempo corrisponde a un ribaltamento nella frequenza.

### 2.6.7 Coniugio

Dato il segnale:

$$s(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_n \quad (2.69)$$

si dimostra che:

$$s_1(t) = s^*(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_{1,n} = S_{-n}^* \quad (2.70)$$

#### Dimostrazione

Considerando che il coniugio non cambia il periodo del segnale:

$$S_{1,n} = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s_1(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s^*(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.71)$$

poichè si vuole che  $s(t)$  compaia nell'integrale, si effettua il coniugio per due volte e si ottiene:

$$S_{1,n} = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \left[ s(t) e^{j2\pi nt/T_0} \right]^* = \left[ \underbrace{\frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t) e^{j2\pi nt/T_0} dt}_{S_{-n}} \right]^* = S_{-n}^* \quad (2.72)$$

quindi un coniugio nel tempo causa un coniugio e un ribaltamento nella frequenza.

### 2.6.8 Traslazione nel tempo

Dato il segnale:

$$s(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_n \quad (2.73)$$

si ha:

$$s_1(t) = s(t - t_1) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_{1,n} = S_n e^{-j2\pi n t_1 / T_0} \quad (2.74)$$

#### Dimostrazione

$$S_{1,n} = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s_1(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s(t - t_1) e^{-j2\pi n t / T_0} dt \quad (2.75)$$

Posto  $t - t_1 = t'$ :

$$\begin{aligned} S_{1,n} &= \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}-t_1}^{\bar{t}-t_1+T_0} s(t') e^{-j2\pi n (t_1+t') / T_0} dt' = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}-t_1}^{\bar{t}-t_1+T_0} s(t') e^{-j2\pi n t_1 / T_0} e^{-j2\pi n t' / T_0} dt' \\ &= S_n e^{-j2\pi n t_1 / T_0} \end{aligned} \quad (2.76)$$

quindi una traslazione nel tempo corrisponde a un esponenziale nella frequenza che comprende l'entità della traslazione.

Si osservi che una traslazione nel tempo modifica lo spettro del segnale solo in termini di fase e non di modulo, infatti:

$$\begin{cases} |S_{1,n}| = |S_n| \\ \vartheta_{1,n} = \vartheta_n - 2\pi n t_1 / T_0 \end{cases} \quad (2.77)$$

questo significa che, se un segnale attraversa un canale che introduce un ritardo, esso viene modificato solo in fase.

### 2.6.9 Derivazione

Dati i segnali  $s(t)$  e  $s_1(t)$  per i quali:

$$s(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_n \quad , \quad s_1(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_{1,n} \quad , \quad s_1(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad (2.78)$$

si dimostra che:

$$S_{1,n} = S_n \frac{j2\pi n}{T_0} \quad (2.79)$$

#### Dimostrazione

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n t / T_0} \quad (2.80)$$

Derivando entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$s_1(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{S_n \frac{j2\pi n}{T_0}}_{S_{1,n}} e^{j2\pi n t / T_0} \quad (2.81)$$

Osserviamo che una derivata nel tempo corrisponde a un'operazione algebrica nel dominio della frequenza, quindi si ottiene una semplificazione computazionale.

Generalizzando per la derivata di ordine  $m$ , si ha:

$$\frac{d^m s(t)}{dt^m} \stackrel{\text{TSF}}{\Leftrightarrow} S_n \left( \frac{j2\pi n}{T_0} \right)^m \quad (2.82)$$

### 2.6.10 Integrazione

Dati i segnali  $s(t)$  e  $s_1(t)$  definiti come segue:

$$s(t) \stackrel{\text{TSF}}{\Leftrightarrow} S_n \quad (2.83)$$

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^t s(t') dt' \stackrel{\text{TSF}}{\Leftrightarrow} S_{1,n} \quad (2.84)$$

si dimostra che:

$$S_{1,n} = \frac{1}{j2\pi n/T_0} S_n \quad (2.85)$$

#### Dimostrazione

Sapendo che:

$$s(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n/T_0} \quad (2.86)$$

effettuando l'integrale di entrambi i membri dell'equazione, si ottiene:

$$s_1(t) = \int_{-\infty}^t s(t') dt' = \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n \frac{1}{j2\pi n/T_0} e^{j2\pi n/T_0} \quad (2.87)$$

si osservi che in questo caso non è necessario verificare che siano valide le condizioni di Dirichlet; però occorre prestare attenzione al caso in cui  $n = 0$ :

$$s(t) = s_0 + \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi n/T_0} \quad (2.88)$$

integrando si ottiene:

$$s_1(t) = S_0 t + \sum_{-\infty}^{+\infty} S_n \frac{1}{j2\pi n/T_0} e^{j2\pi n/T_0} \quad (2.89)$$

e si ottiene un termine che non verifica la condizione di periodicità. Condizione affinché dopo l'integrazione di un segnale  $s(t)$  con periodo  $T_0$  si ottenga ancora un segnale con lo stesso periodo è che  $s(t)$  sia a valor medio nullo, cioè che sia  $S_0 = 0$ .

Infine si osservi che anche in questo caso si ottiene un operatore algebrico in frequenza a partire da un operatore non algebrico nel tempo.

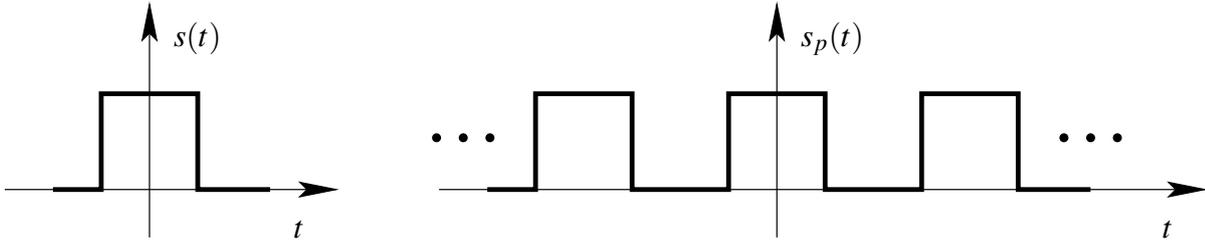


Figura 2.1: Segnale impulsivo e sua rappresentazione periodica

## 2.7 Rappresentazione di segnali impulsivi

Si vuole trovare una rappresentazione nel dominio della frequenza per un segnale impulsivo che abbia durata finita o tenda asintoticamente a 0. Un segnale di questo tipo è un segnale di energia.

**NON NECESSARIAMENTE: ESISTONO SEGNALI CHE TENDONO ASINTOTICAMENTE A 0 PUR SENZA ESSERE DI ENERGIA; RIGUARDO A QUELLI DI DURATA FINITA, BISOGNA IMPORRE CHE SIANO ANCHE LIMITATI.**

Dal segnale  $s(t)$  si passa alla sua rappresentazione periodica per costruzione tramite la funzione  $\text{rep}(\cdot)$ :

$$s(t) \rightarrow s_p(t) = \text{rep}_{T_0}\{s(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT_0) \quad (2.90)$$

Quindi al segnale  $s_p(t)$  si assegna uno spettro tramite la trasformata serie di Fourier:

$$s_p(t) = \text{rep}_{T_0}\{s(t)\} \xleftrightarrow{\text{TSF}} S_n \quad (2.91)$$

Per ottenere  $s(t)$  a partire dal segnale periodico  $s_p(t)$ , si può far tendere  $T_0$  all'infinito:

$$s(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} s_p(t) \quad (2.92)$$

Passando nel dominio della frequenza:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s_p(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_p(t) e^{-j2\pi n t / T_0} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT_0) e^{-j2\pi n t / T_0} dt = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t - kT_0) e^{-j2\pi n t / T_0} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t - kT_0) e^{-j2\pi n t / T_0} \cdot \underbrace{e^{j2\pi n k T_0 / T_0}}_{=1} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t - kT_0) e^{-j2\pi n (t - kT_0) / T_0} dt \\ &\stackrel{t' = t - kT_0}{=} \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-(k+1/2)T_0}^{-(k-1/2)T_0} s(t') e^{-j2\pi n t' / T_0} dt' = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t') e^{-j2\pi n t' / T_0} dt' \end{aligned} \quad (2.93)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che l'unione degli intervalli di integrazione al variare di  $k$  corrisponde all'intero asse reale. Abbiamo dedotto che lo spettro del segnale periodico si ottiene integrando su tutto l'asse reale l'impulso base a partire dal quale è stato costruito.

Si definisce la trasformata continua di Fourier di  $s(t)$  come:

$$S(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (2.94)$$

Confrontando l'ultimo membro della (2.93) e la (2.94), si deduce che

$$S_n = \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad (2.95)$$

quindi la trasformata serie di Fourier si può scrivere in termini della trasformata continua dell'impulso base.

Ad un segnale impulsivo  $s(t)$  abbiamo associato una trasformata continua di Fourier  $S(f)$ ; ora vogliamo associare a  $S(f)$  la corrispondente  $s(t)$ .

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi nt/T_0} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi nt/T_0} \quad (2.96)$$

dove  $f_0 = 1/T_0$  è la frequenza dell'armonica fondamentale; ponendo  $f_0 = \Delta f$ , inteso come una variazione di frequenza quando si passa dalla armonica  $n$  alla armonica  $n + 1$ , otteniamo:

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Delta f \cdot S(n\Delta f) e^{j2\pi \Delta f t} \quad (2.97)$$

$$s(t) = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} s_p(t) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(n\Delta f) e^{j2\pi \Delta f t} \Delta f \quad (2.98)$$

Considerando che:

$$\Delta f \rightarrow 0 \quad \implies \quad n\Delta f \rightarrow 0 \quad , \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \quad (2.99)$$

deduciamo che

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad \longleftarrow \quad \text{Integrale o antitrasformata di Fourier} \quad (2.100)$$

Osserviamo che il generico elemento della serie:

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n e^{j2\pi nt/T_0} \quad (2.101)$$

può essere interpretato come un vettore rotante con fase iniziale  $n$  e pulsazione  $2\pi n/T_0$ . Inoltre, il segnale periodico  $s(t)$  da cui è stato ottenuto  $s_p(t)$  può essere scritto tramite l'integrale:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \quad (2.102)$$

da cui si può facilmente verificare che, mentre  $s_p(t)$  è dato da una infinità discreta di componenti, invece  $s(t)$  è determinato da una infinità continua di componenti armoniche, quindi il generico elemento della somma integrale sarà sempre un vettore rotante con modulo infinitesimo e pari a  $|S(f)|df$  e pulsazione  $\omega = 2\pi f$ . Quindi  $S(f)$  è la densità di ampiezza complessa del segnale  $s(t)$ .

La rappresentazione in frequenza di  $s(t)$ ,  $S(f)$ , viene chiamata *spettro* di  $s(t)$  e, se posta nella forma di Eulero, porta a definire uno spettro di ampiezza,  $S(f)$ , e uno di fase,  $\theta(f)$ , che originano il segnale:

$$S(f) = |S(f)|e^{j\theta(f)} \quad (2.103)$$

### Esempio

Determinare lo spettro dell'impulso rettangolare:

$$s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \quad (2.104)$$

Il segnale in questione è aperiodico e impulsivo, quindi ne calcoliamo la trasformata continua di Fourier:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} A e^{-j2\pi ft} dt = \frac{A}{-j2\pi f} \left( e^{-j2\pi fT/2} - e^{j2\pi fT/2} \right) \\ &= \frac{A}{\pi f} \sin(\pi fT) \end{aligned} \quad (2.105)$$

e, definendo

$$\operatorname{sinc}(x) \triangleq \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (2.106)$$

possiamo scrivere:

$$s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} S(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) \quad (2.107)$$

Quindi la trasformata continua di un impulso rettangolare è una funzione pari (in quanto rapporto di due funzioni dispari), che ha gli zeri sui multipli interi di  $\pi$  e sul cui grafico si possono individuare un lobo principale e dei lobi secondari. L'ampiezza dei lobi dipende dalla durata dell'impulso.

## 2.7.1 Spettro di fase e di ampiezza del segnale periodico

Si vuole determinare lo spettro del segnale:

$$s_p(t) = \operatorname{rep}_{T_0}\{s(t)\} \quad (2.108)$$

Ricordiamo la relazione tra la TCF di  $s(t)$  e la TSF di  $s_p(t)$ :

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s_p(t)e^{-j2\pi n t/T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi n t/T_0} dt = \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad (2.109)$$

cioè  $S_n$  è la TCF di  $s(t)$  calcolata per  $f = n/T_0$ . Dato un segnale impulsivo con spettro continuo, abbiamo ottenuto un segnale periodico con spettro discreto: *una periodizzazione nel tempo corrisponde a un campionamento nella frequenza.*

## 2.8 Proprietà della Trasformata Continua di Fourier

$$s(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S(f) \quad (2.110)$$

dove  $S(f)$  è lo spettro di  $s(t)$  o la trasformata continua di Fourier e può essere rappresentato in termini di modulo e fase:

$$S(f) = |S(f)|e^{j\theta(f)} \quad (2.111)$$

### 2.8.1 Segnale impulsivo

Se  $s(t)$  è un segnale impulsivo, quindi tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)| dt < +\infty \quad (2.112)$$

si ha

$$\|S(f)\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)e^{-j2\pi ft}\| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)\| dt \quad (2.113)$$

quindi sicuramente lo spettro di ampiezza di  $s(t)$  è limitato. Utilizzando il criterio di Dirichlet si hanno condizioni sufficienti per ammettere che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S(f)e^{j2\pi ft} df \quad (2.114)$$

rappresenta il segnale  $s(t)$  su tutto l'asse reale, tranne che nei punti di discontinuità.

### 2.8.2 Segnale di energia

Se  $s(t)$  è un segnale di energia, quindi tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)\|^2 dt < +\infty \quad (2.115)$$

si può dimostrare che  $S(f)$  esiste ed è a sua volta appartenente a  $L^2$ .

### 2.8.3 Linearità

Consideriamo i segnali di energia

$$s_1(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_1(f) \quad , \quad s_2(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_2(f) \quad (2.116)$$

Si può dimostrare che

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S(f) = S_1(f) + S_2(f) \quad (2.117)$$

Questa proprietà si può generalizzare anche per combinazioni lineari di segnali.

### 2.8.4 Hermitianità

$$s(t) \text{ reale} \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S(f) = S^*(-f) \quad (2.118)$$

### 2.8.5 Parità

$$s(t) \text{ pari} \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S(f) \text{ pari} \quad (2.119)$$

$$s(t) \text{ reale e pari} \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S(f) = S^*(f) \text{ reale e pari} \quad (2.120)$$

### 2.8.6 Disparità

$$s(t) \text{ dispari} \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S(f) = -S(-f) \text{ dispari} \quad (2.121)$$

$$s(t) \text{ reale e dispari} \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S(f) \text{ immaginario e dispari} \quad (2.122)$$

#### Dimostrazione

$$s(t) \text{ dispari} \Rightarrow S(f) = -S(-f) \quad (2.123)$$

$$s(t) \text{ reale} \Rightarrow S(f) = S^*(-f) \quad (2.124)$$

Mettendo insieme le due condizioni si deduce che

$$-S(-f) = S^*(-f) \Rightarrow -S(f) = S^*(f) \Rightarrow S(f) + S^*(f) = 0 \Rightarrow 2\Re\{S(f)\} = 0 \quad (2.125)$$

cioè che  $S(f)$ , oltre ad essere dispari, è immaginario.

### 2.8.7 Dualità

Dato:

$$s(t) \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S(f) \quad (2.126)$$

si definisce:

$$s_1(t) = S(t) \quad (2.127)$$

e si dimostra che:

$$s_1(t) = S(t) \xLeftrightarrow{\text{TCF}} S_1(f) = s(-f) \quad (2.128)$$

#### Dimostrazione

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df \stackrel{f \rightarrow \xi = f}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{j2\pi \xi t} d\xi \stackrel{t \rightarrow f}{=} s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{j2\pi \xi f} d\xi \quad (2.129)$$

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j2\pi ft} dt \stackrel{t \rightarrow \xi = t}{=} \int_{-\infty}^{\infty} S(\xi) e^{-j2\pi f \xi} d\xi = s(-f) \quad (2.130)$$

### 2.8.8 Cambiamento di scala

Sia dato il segnale

$$s_1(t) = s(\alpha t) \quad (2.131)$$

Si ha

$$s_1(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_1(f) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) & \text{se } \alpha > 0 \\ -\frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} = \frac{1}{|\alpha|} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad (2.132)$$

#### Dimostrazione

Prima consideriamo il caso  $\alpha > 0$ .

$$\begin{aligned} S_1(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\alpha t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &\stackrel{t'=\alpha t, \alpha>0}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j2\pi f t' / \alpha} \frac{dt'}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j2\pi f / \alpha t'} dt' = \frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (2.133)$$

Nel caso  $\alpha < 0$ , effettuando la stessa sostituzione, si ottiene un ribaltamento degli estremi di integrazione, quindi

$$S_1(f) = \int_{+\infty}^{-\infty} s(t') e^{-j2\pi f t' / \alpha} \frac{dt'}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t') e^{-j2\pi f / \alpha t'} dt' = -\frac{1}{\alpha} S\left(\frac{f}{\alpha}\right) \quad (2.134)$$

Osserviamo che per  $\alpha = -1$  si ottiene un ribaltamento del segnale  $s(t)$ , corrispondente ad un ribaltamento della sua trasformata. Si può affermare che una compressione nel tempo corrisponde ad una espansione nella frequenza, mentre una espansione nel tempo corrisponde ad una compressione nella frequenza.

### 2.8.9 Coniugio

$$s_1(t) = s^*(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_1(f) = S^*(-f) \quad (2.135)$$

### 2.8.10 Traslazione nel tempo

$$s_1(t) = s(t - t_1) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_1(f) = S(f) e^{-j2\pi f t_1} \quad (2.136)$$

quindi nel passaggio al dominio della frequenza viene modificato solo lo spettro di fase e non quello di ampiezza.

### 2.8.11 Traslazione nella frequenza

$$s_1(t) = s(t) e^{j2\pi f_1 t} \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_1(f) = S(f - f_1) \quad (2.137)$$

#### Dimostrazione

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{j2\pi f_1 t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi(f-f_1)t} dt \quad (2.138)$$

$$= S(f - f_1)$$

Osserviamo che,  $e^{j2\pi f_1 t}$  è un segnale armonico complesso, esso è costituito da una sola armonica, che nella frequenza è una riga di spettro in  $f_1$ .

Se si considerano le proprietà di traslazione nel tempo e in frequenza della TCF, si deduce che la TCF è duale a livello di operatori, in quanto a una traslazione in un dominio corrisponde il prodotto della trasformata con un esponenziale complesso a meno di un segno nel dominio coniugato.

### 2.8.12 Teorema della modulazione

La modulazione consiste in opportune modifiche effettuate su un segnale allo scopo di renderlo adatto alla trasmissione.

Ad esempio, prima di essere trasmesso, il segnale  $s(t)$  potrebbe essere moltiplicato per un segnale del tipo  $\cos(2\pi f_c t)$ , detto segnale portante. Lo spettro del segnale che si ottiene in seguito a questo prodotto può essere determinato sfruttando le proprietà della TCF.

$$s_1(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t) = s(t) \frac{1}{2} \left( e^{-j2\pi f_c t} + e^{j2\pi f_c t} \right) = \frac{1}{2} s(t) e^{-j2\pi f_c t} + \frac{1}{2} s(t) e^{j2\pi f_c t} \quad (2.139)$$

quindi si ottiene un prodotto di un segnale per un esponenziale complesso; utilizzando la proprietà di linearità:

$$\frac{1}{2} s(t) e^{j2\pi f_c t} \xleftrightarrow{\text{TCF}} \frac{1}{2} S(f - f_c) \quad (2.140)$$

quindi per lo spettro del segnale modulato si ha

$$s_1(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} \frac{1}{2} S(f - f_c) + \frac{1}{2} S(f + f_c) \quad (2.141)$$

Cioè nella frequenza si hanno due repliche di  $S(f)$  centrate rispettivamente in  $-f_c$  e  $f_c$ . Effettuando questo tipo di modulazione si può scegliere la frequenza  $f_c$  attorno a cui sarà centrato il segnale da trasmettere.

## 2.9 Banda di un segnale

**Definizione 2** La banda del segnale rappresentato dalla funzione  $s(t)$  è definita come misura del supporto della funzione  $S(f)$ .

In relazione alla banda, tipicamente si effettua una distinzione tra *segnali in banda base* e *segnali in banda traslata*. Supponendo di indicare con  $B$  la larghezza di banda di  $s(t)$  e osservando la figura 2.2 si ha che:

- la banda di  $s(t)$  è  $[-f_M, -f_m] \cup [f_m, f_M]$

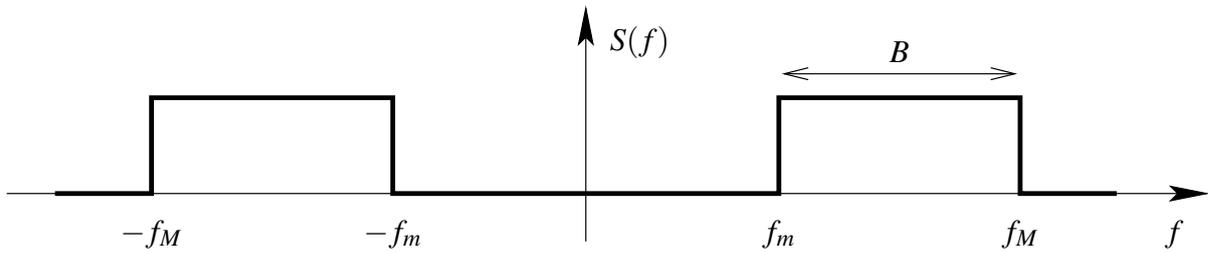


Figura 2.2: Banda di un segnale

- la larghezza di banda di  $s(t)$  è  
 $2(f_M - f_m) = 2B$  bilatera  
 $(f_M - f_m) = B$  monolatera

e si possono dare le seguenti definizioni:

**Definizione 3**  $s(t)$  è un segnale in banda base se il suo supporto è relativamente vicino all'origine delle frequenze, cioè se  $f_m < B$ .

**Definizione 4**  $s(t)$  è un segnale in banda traslata se il suo supporto è molto lontano dall'origine, cioè se  $f_m \gg B$ .

Tipicamente i segnali generati dalle sorgenti sono in banda base, mentre quelli modulati sono in banda traslata.

## 2.10 Impulso ideale di Dirac

Si definisce *delta di Dirac* la distribuzione  $\delta(t)$  che gode della seguente proprietà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t)dt = s(0) \quad (2.142)$$

osserviamo che la delta di Dirac viene definita tramite un'operazione di campionamento. Ora definiamo una successione di impulsi rettangolari di durata  $\varepsilon$  e ampiezza  $1/\varepsilon$ :

$$\delta_\varepsilon(t) \triangleq \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (2.143)$$

riducendo  $\varepsilon$  si ottengono una diminuzione della durata e un aumento dell'ampiezza del segnale.

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha un impulso di durata nulla e ampiezza infinita:

$$\delta(t) \triangleq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) \quad (2.144)$$

tale segnale è chiamato *impulso ideale di Dirac*. Esso gode delle seguenti proprietà:

1. Campionamento: dato il segnale  $s(t)$ , si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\delta(t)dt = s(0) \quad (2.145)$$

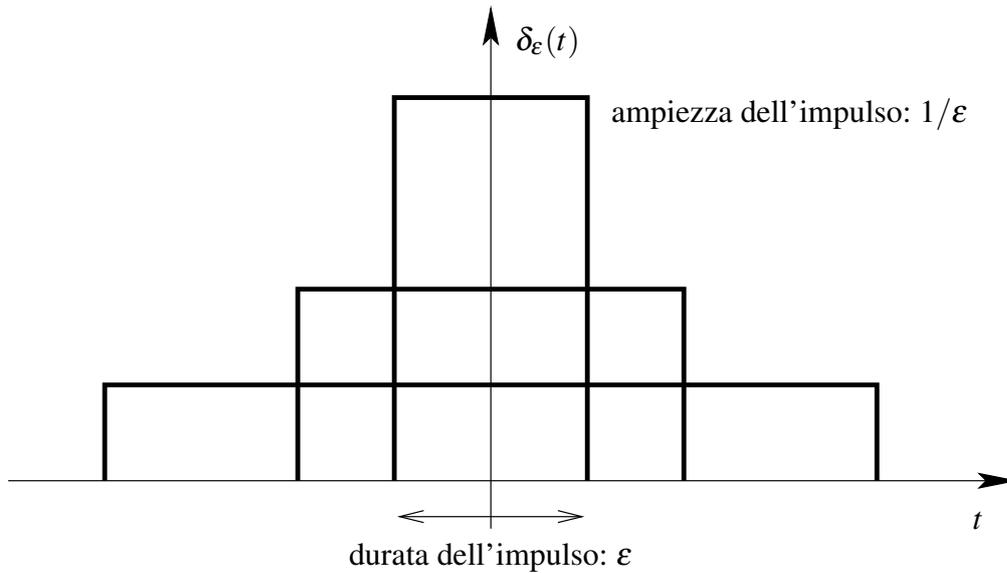


Figura 2.3: Impulsi rettangolari.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - t_1) dt = s(t_1) \quad (2.146)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} s(t) \delta(t - t_1) dt = s(t_1) \quad \text{se } t_1 \in [t_a, t_b] \quad (2.147)$$

2. Parità:  $\delta(-t) = \delta(t)$ , infatti la delta è stata ottenuta tramite passaggio al limite da funzioni pari. Sfruttando questa proprietà si può inoltre osservare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - t_1) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t_1 - t) dt = s(t_1) \quad (2.148)$$

che corrisponde all'integrale di convoluzione.

3. L'area sottesa dalla delta di Dirac è unitaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{t_a}^{t_b} \delta(t) dt = 1 \quad \text{se } t_1 \in [t_a, t_b] \quad (2.149)$$

4. Si può dimostrare che l'impulso ideale di Dirac è un segnale impulsivo ma non è di energia.

### 2.10.1 Impulso esponenziale unilatero

Sia dato il segnale

$$s(t) = A e^{-t/T} u(t) \quad (2.150)$$

Per questo tipo di segnale osserviamo immediatamente una forte riduzione del valore nel punto  $T$ :

$$t = T \quad \Rightarrow \quad s(T) = A \frac{1}{e} u(T) = A \frac{1}{e} \quad (2.151)$$

inoltre osserviamo che  $s(t)$  è un segnale ad energia finita con energia pari a  $A^2T/2$ .

Ora ne vogliamo determinare lo spettro mediante la trasformata continua di Fourier:

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-t/T} u(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^{+\infty} A e^{-(1/T+j2\pi f)t} dt \\ &= -\frac{A}{1/T+j2\pi f} e^{-(1/T+j2\pi f)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{A}{1/T+j2\pi f} = \frac{AT}{1+j2\pi fT} \end{aligned} \quad (2.152)$$

A partire da un segnale reale privo di simmetria nel tempo, abbiamo ottenuto un segnale in frequenza che gode della proprietà di simmetria Hermitiana. Infatti lo spettro di ampiezza è dato da:

$$|S(f)| = A \sqrt{\frac{T^2}{1+4\pi^2 f^2 T^2}} \quad (2.153)$$

quindi si ottiene un segnale a banda illimitata, ma si deve osservare che il peso relativo delle componenti a bassa frequenza è predominante, per questo si può considerare il segnale  $s(t)$  come un segnale in banda base, in quanto le componenti che pesano maggiormente sono concentrate intorno all'origine.

Per lo spettro di fase si ha:

$$\vartheta(f) = \frac{\Im\{S(f)\}}{\Re\{S(f)\}} = \arctan(-2\pi fT) = -\arctan(2\pi fT) \quad (2.154)$$

## 2.11 Effetti di un cambiamento di scala

Consideriamo il segnale

$$s(t) = \text{sinc}(\alpha Bt) \quad \xLeftrightarrow{\text{TCF}} \quad S(f) = \frac{1}{\alpha B} \text{rect}\left(\frac{f}{\alpha B}\right) \quad (2.155)$$

La durata del segnale aumenta e la banda diminuisce se  $\alpha$  diminuisce ( $\alpha < 1$ ).

Inoltre possiamo affermare che ad evoluzioni più lente corrispondono bande più strette.

## 2.12 Spettro dell'esponenziale unilatero

Sia dato il segnale esponenziale unilatero

$$s(t) = A e^{-t/T} u(t) \quad \xLeftrightarrow{\text{TCF}} \quad S(f) \quad (2.156)$$

Considerando che:

$$s_p(t) = \text{rep}_{T_0}\{s(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(t-kT_0) \quad \xLeftrightarrow{\text{TCF}} \quad S_n = \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) \quad (2.157)$$

$$S_n = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{A}{1/T + j2\pi n/T_0} \quad (2.158)$$

perchè la trasformata serie di un segnale periodico si può esprimere in funzione della trasformata continua dell'impulso base.

$$S_n = \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} s_p(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.159)$$

Però osserviamo che il segnale  $s_p(t)$  che si sta utilizzando non è limitato, per questo lo si può considerare come somma di una serie di funzioni che si sovrappongono. Se ci si pone nell'intervallo  $[mT_0, (m+1)T_0]$ , contribuiscono al segnale  $s_p(t)$  solo le funzioni che intervengono prima di  $mT_0$ :

$$\begin{aligned} s_p(t) &= \sum_{k=-\infty}^m s(t-kT_0) = \sum_{k=-\infty}^m A e^{-(t-kT_0)/T} = A \sum_{k'=0}^{+\infty} e^{-[t-(m-k')T_0]/T} \\ &= A \sum_{k'=0}^{+\infty} e^{-(t-mT_0)/T} e^{-k'T_0/T} = A e^{-(t-mT_0)/T} \frac{1}{1-e^{-T_0/T}} \end{aligned} \quad (2.160)$$

definendo ora la quantità

$$g(t) \triangleq \frac{A}{1-e^{-T_0/T}} e^{-t/T} \text{rect}\left(\frac{t-T_0/2}{T_0}\right) \quad (2.161)$$

si può scrivere che:

$$s_p(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g(t-mT_0) \quad (2.162)$$

$$S_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} g(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \quad (2.163)$$

## 2.13 Impulso ideale di Dirac

Dato:

$$\delta_\varepsilon(t) \triangleq \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (2.164)$$

si ottiene l'impulso ideale di Dirac con un'operazione al limite come segue:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t) \quad (2.165)$$

### 2.13.1 Proprietà

1. Campionamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t) dt = s(0) \quad (2.166)$$

quindi si estrae il valore del segnale in  $t = 0$ .

**Dimostrazione**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta_\varepsilon dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} s(t) \frac{1}{\varepsilon} dt \quad (2.167)$$

se  $s(t)$  è una funzione continua, per esso vale il teorema della media, quindi si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta_\varepsilon dt = \frac{1}{\varepsilon} s(\bar{t}) \varepsilon \quad \text{con } \bar{t} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right] \quad (2.168)$$

ora, poichè

$$s(0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta_{\varepsilon}(t) dt \quad (2.169)$$

si ottiene:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} s(\bar{t}) \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = s(0) \quad (2.170)$$

dato che per  $\varepsilon \rightarrow 0$  anche  $\bar{t} \rightarrow 0$ .

Ora possiamo integrare all'interno di un intervallo  $[t_a, t_b]$  che contenga l'origine:

$$\int_{t_a}^{t_b} s(t) \delta(t) dt = s(0) \quad (2.171)$$

2. Dato  $s(t) = 1$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot \delta(t) dt = \int_{t_a}^{t_b} 1 \cdot \delta(t) dt = 1 \quad (2.172)$$

Si noti che questa proprietà conferma ciò che abbiamo già detto in precedenza, cioè che l'area della delta di Dirac è unitaria.

3. La delta di Dirac è un segnale pari, infatti:

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \delta_{\varepsilon}(-t) \quad \forall \varepsilon \quad (2.173)$$

quindi anche per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

4. Generalizzazione della proprietà di campionamento:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t - \bar{t}) dt = s(\bar{t}) \quad (2.174)$$

e, poichè  $\delta(t)$  è pari,

$$s(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(\bar{t} - t) dt = \int_{t_a}^{t_b} s(t) \delta(\bar{t} - t) dt \quad (2.175)$$

se  $\bar{t} \in [t_a, t_b]$ .

5.

$$s(t) \delta(t) = s(0) \delta(t) \quad (2.176)$$

infatti la delta di Dirac permette di ottenere solo il valore di  $s(t)$  nell'origine:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(0) \delta(t) dt = s(0) \quad (2.177)$$

Osserviamo che la delta di Dirac rappresenta un segnale che non può esistere nella pratica, poichè corrisponderebbe a un segnale che da ampiezza nulla si porterebbe ad ampiezza infinita in un tempo nullo.

### 2.13.2 Spettro della delta di Dirac

Si ricorda che la trasformata continua di Fourier può essere applicata a segnali  $\in L^2$ , mentre  $\delta(t)$  è un segnale impulsivo ad energia infinita:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\delta_{\varepsilon}(t)|^2 dt = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \frac{1}{\varepsilon^2} dt = \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \quad , \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} = \infty \quad (2.178)$$

quindi la delta di Dirac non è trasformabile in senso stretto con Fourier. Proviamo ugualmente a calcolarne la trasformata:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi ft} \Big|_{t=0} = 1 \quad (2.179)$$

Il fatto che la TCF calcolata valga 1 è giustificabile con le osservazioni precedentemente fatte per la TCF di segnali impulsivi e considerando che, se  $s(t)$  è un segnale impulsivo,

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|s(t)\| dt < +\infty \quad (2.180)$$

Ora calcoliamo l'antitrasformata. C'è un problema legato al fatto che la convergenza di

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} df \quad (2.181)$$

non è assicurata. Quindi consideriamo il treno di impulsi da cui è stata ricavata la delta, (2.164), e osserviamo che, per  $\varepsilon$  che diminuisce, in frequenza si ottiene una estensione dei lobi della  $\text{sinc}(\cdot)$ , che resterà comunque ancorata al punto di ordinata 1 per  $t = 0$ , poiché nel tempo le  $\text{rect}(\cdot)$  avranno sempre area unitaria. Da questo si può pensare che, al limite di durata nulla, si ottiene in frequenza uno spettro di ampiezza unitaria e supporto infinito. Quindi:

$$\delta(t) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} 1 \quad (2.182)$$

#### Osservazioni

1. Nello spettro della delta di Dirac, tutte le componenti hanno lo stesso peso.
2. Una periodicizzazione nel tempo corrisponde ad un campionamento nella frequenza.

**CLAUDIA: mancano assolutamente le figure di pagina 68 primo quaderno.**

Campionando la  $S(f)$  a passo di  $1/T_0$ , si ottiene:

- $n = 0 \Rightarrow S(0) = 1$ , perché  $T = T_0$
- $n = 1 \Rightarrow S(1/T) = 0$
- $n = 2 \Rightarrow S(2/T) = 0$
- ecc.

# Capitolo 3

## Sistemi continui

*Sistema*: apparato fisico che apporta delle modifiche al segnale che lo attraversa. Il sistema continuo

può essere rappresentato tramite una trasformazione che mette in relazione il segnale continuo in ingresso con il segnale continuo in uscita.

$$y(t) = T_c[x(t)] = T_c[x(\varepsilon)] , \varepsilon \in (-\infty, +\infty) \quad (3.1)$$

dove  $T_c$  è detto *funzionale* in quanto mette in relazione due funzioni.

### 3.1 Proprietà

1. *Linearità*: un sistema si dice lineare se dato il segnale in ingresso del tipo  $x(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i(t)$  in uscita risulta:

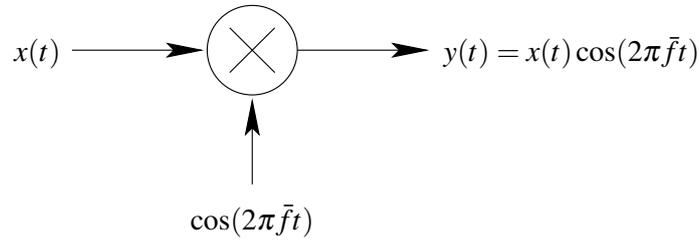
$$y(t) = T_c[x(t)] = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i(t) \quad (3.2)$$

dove  $y_i(t) = T_c[x_i(t)]$ . Questa proprietà è anche nota come principio di sovrapposizione degli effetti.

#### Esempi

- $\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$  è un sistema continuo lineare.
- $y(t) = x^2(t)$  non è lineare (rilevatore quadratico).
- $y(t) = |x(t)|$  non è lineare.
- $y(t) = x(t) + c$  a rigore non è lineare infatti considerando  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  e ponendoli separatamente in ingresso al sistema che si sta analizzando si ottiene  $y_1(t) = x_1(t) + c$  e  $y_2(t) = x_2(t) + c$ . Ponendo invece come ingresso la somma  $x_1(t) + x_2(t)$  si ottiene  $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + c$ , mentre se il sistema fosse stato lineare si sarebbe dovuto ottenere  $y(t) = x_1(t) + x_2(t) + 2c$ .

2. *Tempo-invarianza*: un sistema si dice tempo-invariante se, dato  $y(t) = T_c[x(t)]$  e definito  $x_1(t) = x(t - \bar{t})$ , risulta  $y_1(t) = T_c[x_1(t)] = y(t - \bar{t})$ .

**Esempio**

3. *Causalità*:  $y(t) = T_c[x(\xi)]$ ,  $\xi \in (-\infty, t]$

4. *Stabilità*:  $|x(t)| \leq Mx < +\infty \Rightarrow |y(t)| \leq Mx < +\infty$

5. *Memoria*: si dice che un sistema lineare tempo invariante ha memoria quando la sua uscita in un certo istante non dipende esclusivamente dal valore dell'ingresso applicato in quello stesso istante, ma anche da valori precedentemente assunti dall'ingresso. Ad esempio  $y(t) = x(t) + x(t - \bar{t})$  è un sistema con memoria mentre  $y(t) = cx(t)$  è istantaneo cioè non ha memoria. Si osservi che si ammette l'esistenza di sistemi non causali ma con memoria. Si suppone che i sistemi non lineari siano istantanei, cioè senza memoria.

Come si può caratterizzare il legame ingresso-uscita per un sistema lineare tempo-invariante?

Si può pensare di approssimare il segnale  $x(t)$  con gradini di passo  $\varepsilon$ , prendendo come ampiezza il valore centrale del gradino.

$$x(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n\varepsilon)}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t-n\varepsilon}{\varepsilon}\right) \varepsilon \quad (3.3)$$

Quindi si sta considerando la somma di impulsi rettangolari del tipo:

$$\rho_n(t) = \frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t-n\varepsilon}{\varepsilon}\right) \quad (3.4)$$

Prendendo ora due impulsi rettangolari di questo tipo centrati in due istanti di tempo differenti e facendone il prodotto interno si ottiene:

$$\begin{aligned} (\rho_n, \rho_m) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) \rho_m(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon^2} \text{rect}\left(\frac{t-n\varepsilon}{\varepsilon}\right) \text{rect}\left(\frac{t-m\varepsilon}{\varepsilon}\right) dt \\ &= \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq m \\ 1/\varepsilon & \text{per } n = m \end{cases} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Facendo tendere a zero la durata delle rect a zero si ottiene una rappresentazione di  $x(t)$  con un treno di impulsi:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x(n\varepsilon)}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t-n\varepsilon}{\varepsilon}\right) \varepsilon = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t) \quad (3.6)$$

Questo perchè, se  $\varepsilon$  tende a 0, si ha:

- $\varepsilon \rightarrow d\tau$

- $n\varepsilon \rightarrow \tau$
- $\frac{1}{\varepsilon} \text{rect}\left(\frac{t-n\varepsilon}{\varepsilon}\right) \rightarrow \delta(t - \tau)$
- $\sum_{-\infty}^{+\infty} \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}$

Quindi è stato ottenuta la rappresentazione del segnale  $x(t)$  tramite una *serie di impulsi*. Quindi l'uscita del sistema continuo sarà data da:

$$y(t) = T_c[x(t)] = T_c \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) T_c[\delta(t - \tau)] d\tau \quad (3.7)$$

avendo sfruttato la proprietà di linearità data dal fatto che  $x(\tau)$  è una costante rispetto a  $T_c$  che opera solo su  $t$ . Inoltre, sfruttando anche la proprietà di tempo-invarianza:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.8)$$

dove si definisce *risposta impulsiva* del sistema continuo:

$$h(t) \triangleq T_c[\delta(t)] \quad (3.9)$$

Quindi per un sistema LTI si ottiene:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.10)$$

dove  $y(t)$  è la risposta del sistema all'ingresso  $x(t)$ . Affinchè sia possibile caratterizzare il sistema LTI è importante conoscere l'andamento della risposta impulsiva.

## 3.2 Proprietà del prodotto di convoluzione

Si indica il prodotto di convoluzione con il simbolo  $\otimes$ , quindi si ha:

$$y(t) = x(t) \otimes \delta(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.11)$$

1. Commutativa: scambiando ingresso e risposta impulsiva si ottiene lo stesso segnale in uscita.

**Dimostrazione:**

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \bar{\tau}) h(\bar{\tau}) d\bar{\tau} \quad (3.12)$$

ottenuto imponendo  $\bar{\tau} = t - \tau$ . Quindi è stato dimostrato che si ottiene ancora un prodotto di convoluzione:  $h(t) \otimes x(t)$ . Si osservi che questa espressione può essere interpretata considerando un sistema del tipo mostrato in figura 3.1.

2. Associativa: si considerino due sistemi LTI collegati in serie o in cascata come in figura 3.2. Per essi sappiamo che:  $y_1(t) = x(t) \otimes h_1(t)$  e che  $y_2(t) = y_1(t) \otimes h_2(t)$ . Si vuole esprimere il legame ingresso-uscita dell'intero sistema:

$$y(t) = [x(t) \otimes h_1(t)] \otimes h_2(t) = x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)] \quad (3.13)$$

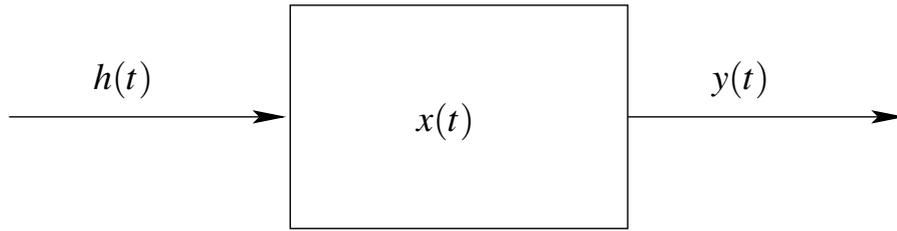


Figura 3.1: Proprietà commutativa per sistemi LTI.

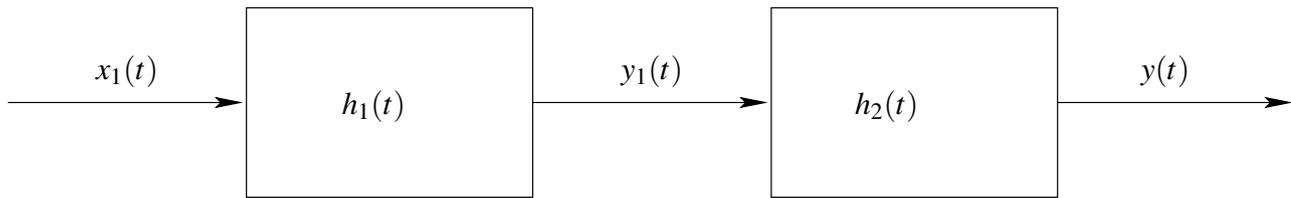


Figura 3.2: Proprietà associativa per sistemi LTI.

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_1(\tau) h_2(t - \tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(\bar{\tau}) h_1(\tau - \bar{\tau}) d\bar{\tau} \right) h_2(t - \tau) d\tau
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ora, effettuando il cambiamento di variabile  $\tau' = \tau - \bar{\tau}$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\bar{\tau}) h_1(\tau') h_2(t - \bar{\tau} - \tau') d\bar{\tau} d\tau' \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\bar{\tau}) [h_1(t - \bar{\tau}) \otimes h_2(t - \bar{\tau})] d\bar{\tau} \\
 &= x(t) \otimes [h_1(t) \otimes h_2(t)]
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Quanto ottenuto può essere interpretato considerando la convoluzione  $h_1(t) \otimes h_2(t)$  come la risposta impulsiva di un sistema LTI equivalente, quindi la serie o cascata fra due sistemi LTI è equivalente ad un sistema LTI la cui risposta impulsiva è data dalla convoluzione delle risposte impulsive dei sistemi di partenza.

**Osservazioni**

- Tenendo conto anche della proprietà commutativa si può concludere che il comportamento del sistema nel suo complesso è indipendente dalla posizione relativa dei blocchi che lo costituiscono.

- Si può reinterpretare la relazione costitutiva della delta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) \otimes \delta(t) = x(t) \quad (3.16)$$

si osservi infatti che la delta risulta l'elemento unitario rispetto al prodotto di convoluzione.

- Inoltre considerando una traslazione della delta ed effettuando la convoluzione con un segnale  $x(t)$  si osserva che il segnale in uscita risulterà ugualmente traslato:

$$x(t) \otimes \delta(t - \bar{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \bar{t} - \tau) d\tau = x(t - \bar{t}) \quad (3.17)$$

### 3.3 Sistemi LTI

Sia dato un sistema LTI con segnale di ingresso  $x(t)$  e segnale di uscita  $y(t)$  i quali ammettono le seguenti TCF:

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} X(f) \\ y(t) &\stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} Y(f) \end{aligned}$$

Si vuole determinare la relazione in frequenza tra ingresso e uscita del sistema sapendo che la sua risposta impulsiva è data da  $h(t)$ . Si dimostra che:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \quad \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} \quad Y(f) = X(f)H(f) \quad (3.18)$$

dove  $H(f)$  è la TCF della risposta impulsiva del sistema.

#### Dimostrazione:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2j\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right] e^{-2j\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau) e^{-2j\pi ft} dt \right] x(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.19)$$

usando la proprietà della trasformata continua di Fourier per una traslazione nel tempo, si ottiene:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{-2j\pi f\tau} x(\tau) d\tau \\ &= H(f) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2j\pi f\tau} x(\tau) d\tau \\ &= H(f) X(f) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Quindi ad una convoluzione ordinaria nel tempo corrisponde un prodotto nella frequenza; questo significa che la  $H(f)$  pesa le singole componenti in frequenza del segnale di ingresso. Inoltre se

alcune componenti non sono presenti nel segnale di ingresso non lo saranno neppure nel segnale in uscita.

Ora si pone in ingresso al sistema LTI un segnale armonico complesso del tipo:

$$x(t) = e^{j2\pi ft} \quad (3.21)$$

Il segnale di uscita sarà dato da:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h(t) = h(t) \otimes x(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{j2\pi f_0(t-\tau)}d\tau \\ &= e^{j2\pi f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_0 \tau}d\tau \\ &= H(f_0)e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned} \quad (3.22)$$

dove  $H(f_0)$  è la trasformata di Fourier di  $h(t)$  calcolata in corrispondenza dell'unica componente in frequenza del segnale di ingresso. Quindi ponendo in ingresso ad un sistema LTI un segnale armonico puro, in uscita si ottiene ancora un segnale armonico puro in cui risulta modificata solo la ampiezza complessa che non è più unitaria:

$$e^{j2\pi f_0 t} \otimes h(t) \xLeftrightarrow{\text{TCF}} H(f_0)e^{j2\pi f_0 t} \quad (3.23)$$

In base a queste osservazioni ed in analogia con la teoria degli spazi vettoriali, si può affermare che gli esponenziali complessi (segnali armonici puri) rappresentano le autofunzioni per i sistemi LTI.

Ora si generalizza ciò che è stato ottenuto per un insieme *infinito* di componenti armoniche. Per questo si considera un segnale periodico di periodo  $T_0$ , rappresentabile con uno sviluppo in serie di Fourier:

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n t / T_0} \quad (3.24)$$

L'uscita del sistema LTI sarà data da:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n t / T_0} \otimes h(t) \quad (3.25)$$

Utilizzando la proprietà associativa si ottiene:

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[ X_n e^{j2\pi n t / T_0} \otimes h(t) \right] \quad (3.26)$$

Ora, sfruttando ciò che è stato ottenuto per un singolo segnale armonico complesso, si ha:

$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} X_n H\left(\frac{n}{T_0}\right) e^{j2\pi n t / T_0} \quad (3.27)$$

### Osservazioni

1. Ponendo in ingresso un segnale periodico di periodo  $T_0$ , in uscita si ottiene ancora un segnale periodico di periodo  $T_0$ ; infatti  $Y_n = X_n H(n/T_0)$  rappresenta lo sviluppo in serie di Fourier di un segnale periodico di periodo  $T_0$ , con  $Y_n$  generico coefficiente dello sviluppo.
2. Il legame appena introdotto definisce le modalità con cui il sistema LTI modifica le ampiezze complesse delle singole componenti in frequenza del segnale in ingresso. Quindi  $H(f)$  viene chiamata *risposta in frequenza del sistema LTI*, perché modifica frequenza per frequenza l'ampiezza complessa delle componenti armoniche del segnale di ingresso.

#### 3.3.1 Esempio

Si consideri un segnale armonico lineare di periodo  $T_0 = 1/f_0$ :

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \quad (3.28)$$

Nel complesso si ottiene:

$$X_n = \begin{cases} \frac{A}{2} & \text{per } n = \pm 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.29)$$

Supponendo nota la risposta impulsiva del sistema LTI:

$$h(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} H(f) \quad (3.30)$$

$$Y_n = \begin{cases} \frac{A}{2} H(f_0) & \text{per } n = 1 \\ \frac{A}{2} H(-f_0) & \text{per } n = -1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$y(t) = y_1 e^{j2\pi n f_0} + y_{-1} e^{-j2\pi n f_0} = \frac{A}{2} H(f_0) e^{j2\pi n f_0} + \frac{A}{2} H(-f_0) e^{-j2\pi n f_0} \quad (3.32)$$

scrivendo  $H(f_0)$  in termini di modulo e fase e ricordando che gode della simmetria Hermitiana per cui  $H(f_0) = H^*(-f_0)$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2} |H(f_0)| e^{j\theta_h(f_0)} e^{j2\pi n f_0} + \frac{A}{2} |H(-f_0)| e^{-j\theta_h(f_0)} e^{-j2\pi n f_0} \\ &= A |H(f_0)| \left\{ \frac{e^{j[\theta_h(f_0)+2\pi n f_0]} + e^{-j[\theta_h(f_0)+2\pi n f_0]}}{2} \right\} \\ &= A |H(f_0)| \cos[2\pi f_0 t + \theta_h(f_0)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Quindi, a partire da un coseno di fase nulla ed ampiezza  $A$ , si ottiene in uscita un coseno sfasato di  $\theta_h(f_0)$  e con ampiezza  $A|H(f_0)|$ . Si osserva che il periodo rimane invariato. Inoltre, poichè  $|H(f)|$  e  $\theta_h(f)$  rappresentano rispettivamente la risposta in ampiezza ed in fase del sistema LTI si ha:

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)| \quad (3.34)$$

$$\theta_y(f) = \theta_x(f) + \theta_h(f) \quad (3.35)$$

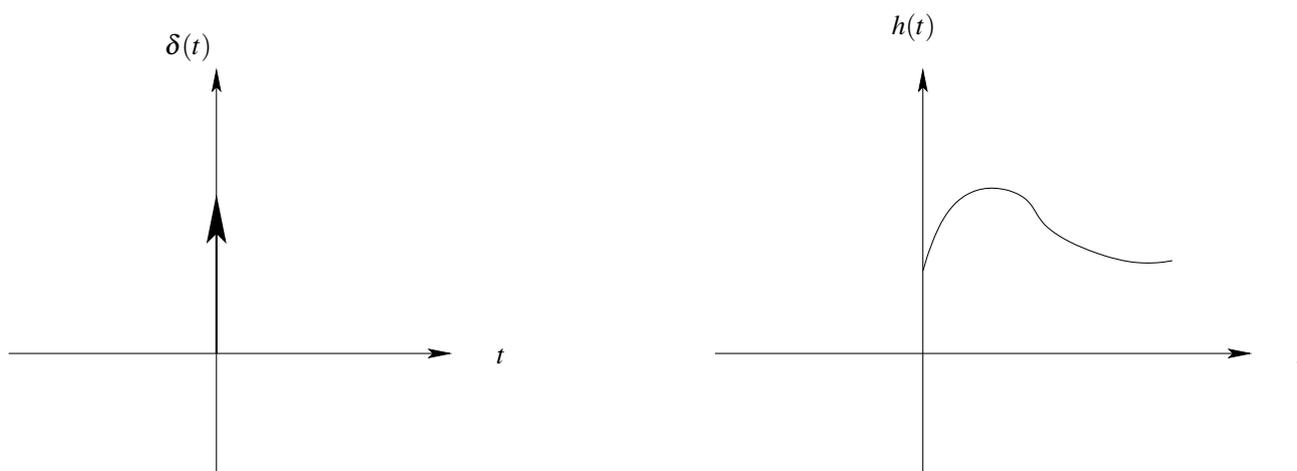


Figura 3.3: Proprietà di causalità per sistemi LTI.

### 3.3.2 Altre proprietà dei sistemi LTI

- **Stabilità:** un sistema si dice stabile se a un ingresso limitato in ampiezza corrisponde un'uscita anch'essa limitata in ampiezza. Più precisamente, dato  $|x(t)| \leq Mx$ , poichè l'uscita di un sistema LTI si esprime come:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (3.36)$$

ne consegue che:

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)| \cdot |h(t-\tau)|d\tau \\ &\leq Mx \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau \end{aligned} \quad (3.37)$$

Si osservi che, affinché questa quantità sia finita, è necessario che l'integrale  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau$  sia limitato, cioè che la funzione  $h(t)$  sia un segnale impulsivo:  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t-\tau)|d\tau < +\infty$ .

Quindi condizione necessaria e sufficiente<sup>1</sup> affinché un sistema lineare tempo-invariante sia stabile è che il segnale  $h(t)$  sia impulsivo.

- **Causalità:** un sistema LTI è causale se la generica dipendenza tra segnale di ingresso e di uscita può essere espressa come segue:

$$y(t) = T_c[x(\zeta)] \quad , \quad \zeta \in (-\infty, t] \quad (3.38)$$

Questo implica che la risposta di un sistema LTI causale è nulla fino a quando non viene applicato l'ingresso.

<sup>1</sup>in questa sede è stata dimostrata solo la sufficienza

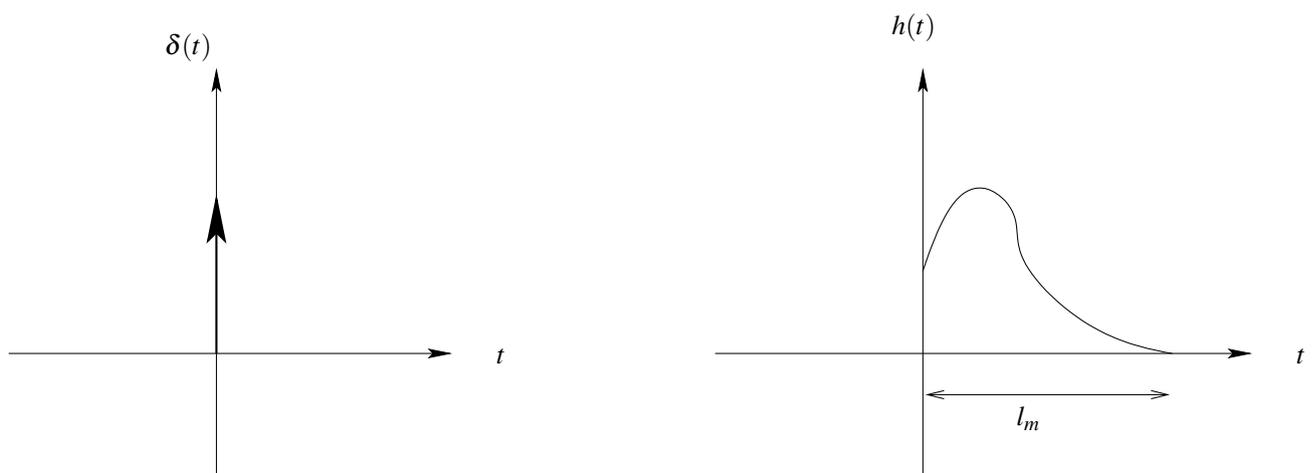


Figura 3.4: Sistema LTI con memoria di lunghezza finita  $l_m$ .

- Un sistema causale si dice *istantaneo* o *privo di memoria* se:

$$y(t) = T_c[x(\varepsilon)] \quad \text{per } \varepsilon = t \quad (3.39)$$

cioè se l'uscita in un certo istante dipende solo dall'ingresso allo stesso istante.

- Si dice che un sistema causale ha *memoria di lunghezza*  $l_m$  se:

$$y(t) = T_c[x(\varepsilon)] \quad \text{per } \varepsilon \in (t - l_m, t] \quad (3.40)$$

### 3.3.3 Esempi di sistemi LTI

#### Ritardatore Ideale

Sia dato il sistema con relazione ingresso–uscita mostrata nella figura 3.5, dove  $T$  rappresenta l'entità del ritardo introdotto. La risposta impulsiva si ottiene ponendo in ingresso una delta di Dirac:  $x(t) =$

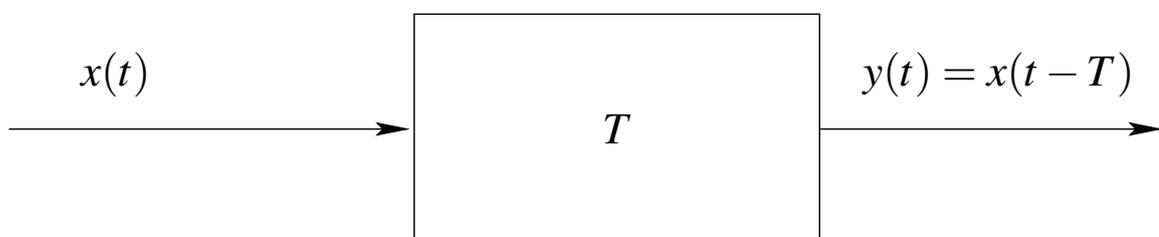


Figura 3.5: Ritardatore Ideale.

$\delta(t)$ .

$$y(t) = h(t) = \delta(t - T) \quad (3.41)$$

Quindi la trasformata della risposta impulsiva è data da:

$$H(f) = 1 \cdot e^{-j2\pi fT} \quad (3.42)$$

Quindi le ampiezze delle componenti in frequenza rimangono inalterate.

### Canale a due raggi

Sia dato il sistema mostrato nella figura 3.6 in cui si effettua la somma fra un segnale  $x(t)$  e lo stesso segnale traslato di una quantità  $T$ . Si ottiene in uscita:

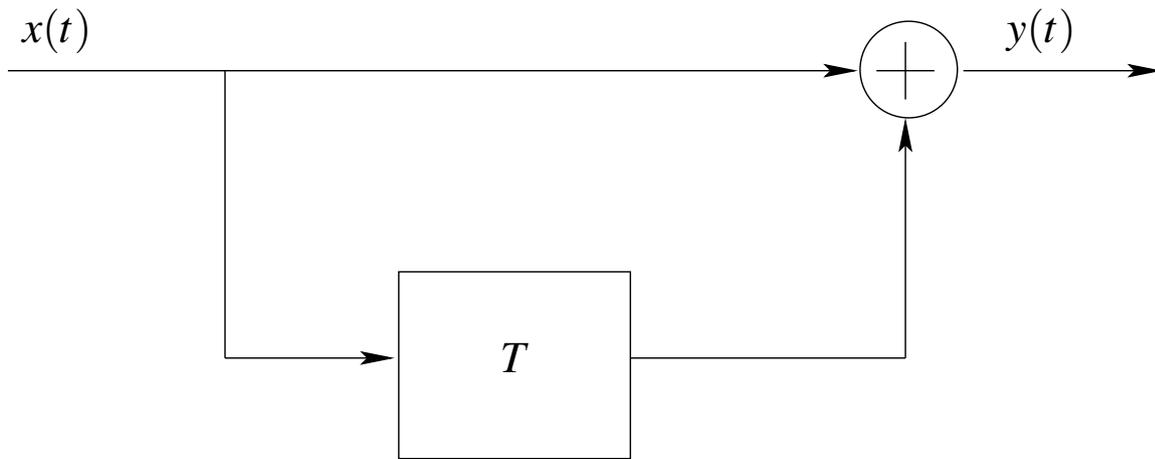


Figura 3.6: Canale a due raggi.

$$y(t) = x(t) + x(t - T) \quad (3.43)$$

La risposta impulsiva si ottiene al solito ponendo in ingresso al sistema una delta di Dirac:

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t - T) \quad (3.44)$$

Da questo si deduce che il sistema che si sta modellando ha un comportamento dispersivo, poichè in uscita si individua una componente non centrata nell'origine, che non è presente nel segnale di ingresso; in questo caso si dice che si ha dispersione sull'asse dei tempi (fig. 3.7). Quindi la risposta in frequenza sarà:

$$H(f) = 1 + e^{-j2\pi fT} \quad (3.45)$$

dove la risposta in ampiezza è data da:

$$\begin{aligned} |H(f)|^2 &= H(f) \cdot H^*(f) = (1 + e^{-j2\pi fT}) \cdot (1 + e^{j2\pi fT}) = 2 + 2\cos(2\pi fT) \\ |H(f)| &= \sqrt{2(1 + \cos(2\pi fT))} \end{aligned} \quad (3.46)$$

quindi la risposta in ampiezza introduce un nuovo cammino non costante ma con andamento esponenziale.

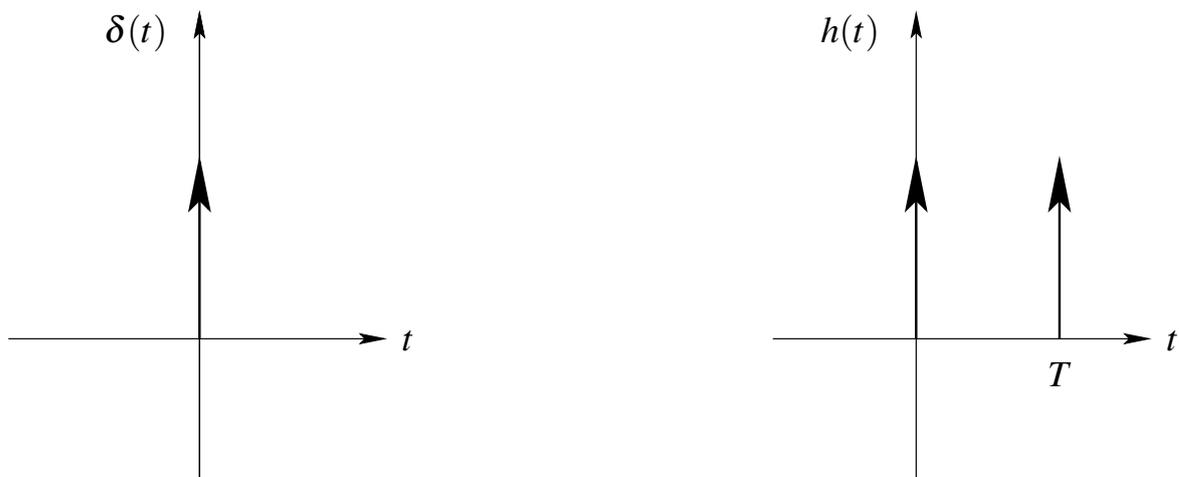


Figura 3.7: Risposta impulsiva del canale a due raggi.

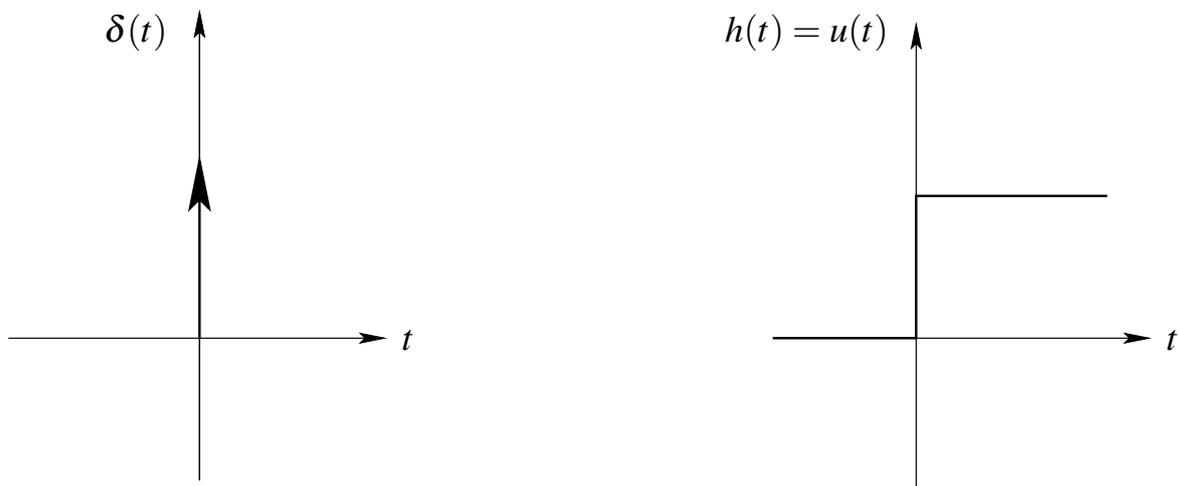


Figura 3.8: Risposta impulsiva dell'integratore ideale.

### Integratore Ideale

Un integratore ideale è definito dal seguente legame ingresso–uscita:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(t') dt' \quad (3.47)$$

Per verificare che sia un sistema LTI al solito si pone in ingresso una delta di Dirac:

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = u(t) \quad (3.48)$$

quindi in uscita si ottiene una funzione a gradino come mostrato nella figura 3.8.

### Osservazioni

- Poichè  $h(t) = 0$  per  $t < 0$ , il sistema è causale.

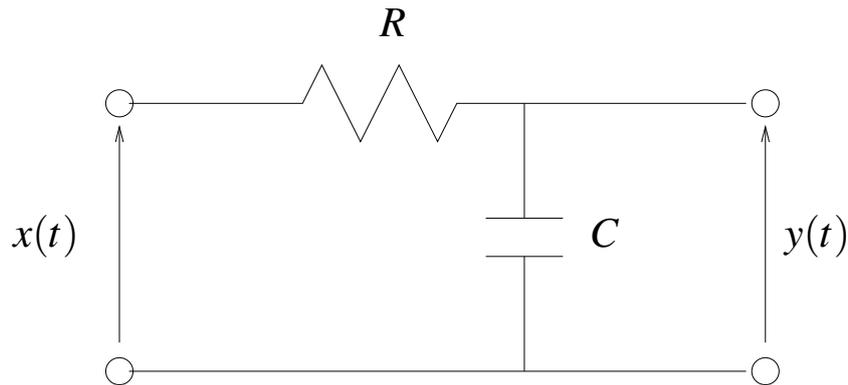


Figura 3.9: Circuito RC.

- $h(t)$  ha durata illimitata, quindi il sistema ha memoria infinita.
- $h(t)$  non è un segnale impulsivo, quindi il sistema non è stabile.

Inoltre, la risposta in frequenza dell'integratore è data da:

$$H(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2j\pi f} \quad (3.49)$$

Generalizzando, la risposta in frequenza del sistema è data da:

$$Y(f) = \frac{1}{2}\delta(f)X(0) + \frac{X(f)}{2j\pi f} \quad (3.50)$$

### Integratore a Finestra Mobile

Per l'integratore a finestra mobile, il legame ingresso-uscita è dato dalla seguente espressione:

$$y(t) = \int_{t-T}^t x(t')dt' \quad (3.51)$$

Quindi si ha un sistema LTI, la cui risposta impulsiva è data da:

$$h(t) = \int_{t-T}^t \delta(t')dt' = \int_{-\infty}^t \delta(t')dt' - \int_{-\infty}^{t-T} \delta(t')dt' = u(t) - u(t-T) = \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \quad (3.52)$$

Quindi si ottiene un sistema causale, con memoria di lunghezza  $T$  e stabile.

### Circuito RC

Sia dato un classico circuito RC come quello mostrato nella figura 3.9, dove  $x(t)$  è la tensione di ingresso,  $y(t)$  quella di uscita. Il legame ingresso-uscita si esprime tramite l'equazione della maglia:

$$x(t) = Ri(t) + y(t) = RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) \quad (3.53)$$

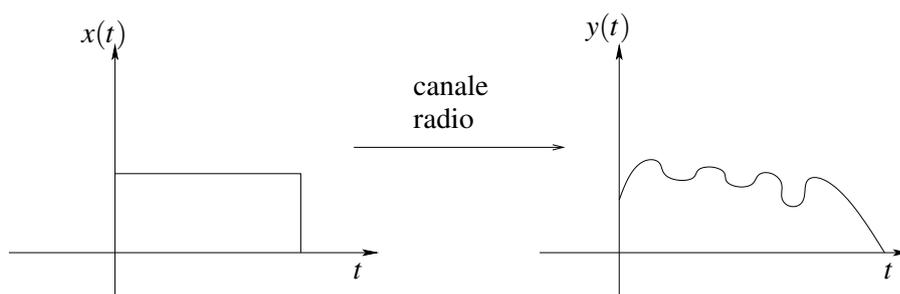


Figura 3.10: Esempio di distorsione del segnale di ingresso.

risolvendo tale equazione differenziale nel dominio della frequenza, si ottiene:

$$X(f) = RCj2\pi fY(f) + Y(f) \quad (3.54)$$

Si vuole ricavare la risposta impulsiva del sistema; sapendo che  $Y(f) = H(f)X(f)$ , si ottiene:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1}{1 + j2\pi RCf} \quad (3.55)$$

antitrasformando:

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/(RC)} u(t) \quad (3.56)$$

si osserva che  $\tau = RC$  è proprio la costante di tempo che indica quanto rapidamente si scarica il condensatore.

### 3.4 Condizioni di non distorsione

Si dice che un sistema distorce il segnale in ingresso quando la forma di quest'ultimo risulta modificata in uscita, come avviene nell'esempio della figura 3.10. Invece, si dice che il sistema non distorce il segnale di ingresso quando in uscita si ha un segnale che, rispetto all'originale, risulta al più attenuato in ampiezza e ritardato nel tempo. In maniera formale, indicato con  $x(t)$  il segnale in ingresso, all'uscita di un sistema continuo non distorcente si ottiene:

$$y(t) = Kx(t - \bar{t}) \quad (3.57)$$

Il legame specificato descrive un sistema lineare tempo-invariante con risposta impulsiva data da 3.11:

$$h(t) = K\delta(t - \bar{t}) \quad (3.58)$$

Facendo la trasformata continua di Fourier e quindi passando al dominio coniugato, si ottiene:

$$H(f) = Ke^{-2\pi f\bar{t}} \quad (3.59)$$

in cui l'attenuazione è espressa da  $|H(f)| = K$ , mentre il ritardo introdotto è dato da  $\theta(f) = -2\pi f\bar{t}$ . Queste due condizioni, che determinano il tipo di attenuazione e sfasamento che possono essere introdotte da un sistema/canale considerato non distorcente, sono anche note come *condizioni di Heaviside*.

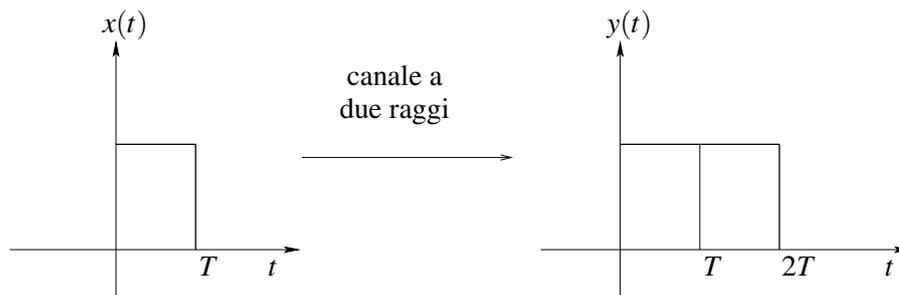


Figura 3.11: Risposta impulsiva di un sistema non distortore..

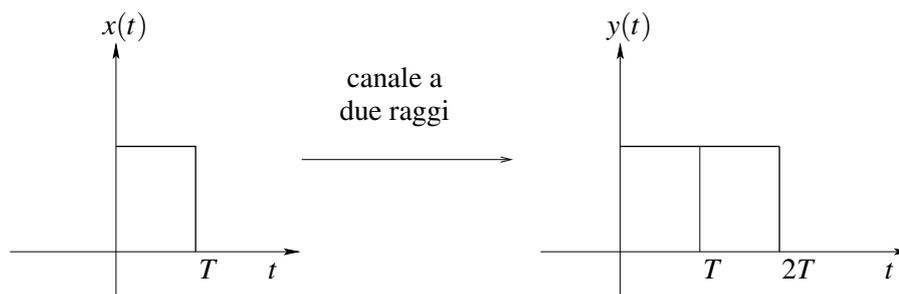


Figura 3.12: Dispersione temporale introdotta dal canale a due raggi.

### 3.4.1 Casi di distorsione

È interessante considerare due possibili casi di sistema che non rispetta le condizioni di Heaviside:

1. Sistema LTI con risposta in frequenza che non rispetta le condizioni suddette.
2. Sistema non lineare su cui si fa l'ipotesi restrittiva di istantaneità.

### 3.4.2 Sistema LTI con risposta in frequenza che non soddisfa le condizioni di Heaviside

Si consideri il canale a due raggi, 3.3.3. Si dimostra facilmente che il modulo della risposta in frequenza è dato da:

$$|H(f)| = \sqrt{2[1 + \cos(2\pi fT)]} \quad (3.60)$$

quindi si deduce che il canale a due raggi non soddisfa la condizione di Heaviside sull'ampiezza della risposta in frequenza; infatti alcune componenti in frequenza vengono amplificate (cioè moltiplicate per 2) mentre altre vengono rese "invisibili" in uscita. In questo caso si parla di *distorsione lineare* (perché il canale è lineare) *di ampiezza* o anche di *dispersione*, perché la durata del segnale in ingresso è inferiore alla durata del segnale in uscita, 3.12.

## 3.5 Filtri Lineari Ideali

I filtri lineari ideali rappresentano un'importante classe di sistemi LTI. Con il termine *Filtro* si intende un apparato che esercita un'azione selettiva nei confronti delle componenti in frequenza del segnale

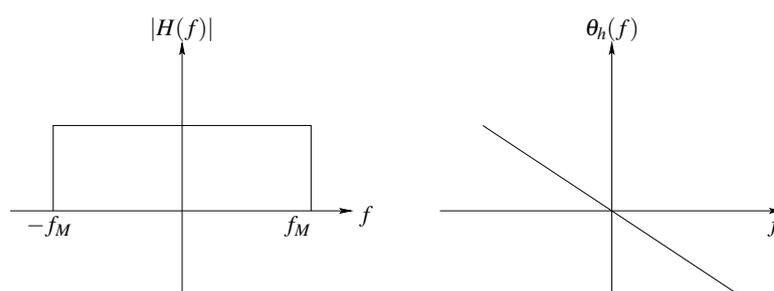


Figura 3.13: Modulo e fase della risposta in frequenza di un filtro passa-basso ideale.

di ingresso, per questo i filtri si classificano in base alle frequenze che appartengono alle bande di interesse e a quelle che si intende eliminare, in particolare si distinguono quattro tipi di filtri ideali:

1. passa-basso,
2. passa-alto,
3. passa-banda,
4. elimina-banda.

Si definisce *banda passante* del filtro ideale il supporto della risposta di ampiezza. Si definisce *banda oscura* del filtro ideale il complemento della banda passante.

### 3.5.1 Filtro ideale passa-basso

Nella figura 3.13 sono mostrati modulo e fase della risposta in frequenza di un filtro passa basso le cui espressioni sono le seguenti:

$$|H(f)| = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_M}\right) \quad (3.61)$$

$$\theta_h(f) = -2\pi f\bar{t} \quad (3.62)$$

quindi complessivamente la risposta in frequenza è data da:

$$H(f) = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_M}\right) e^{-2\pi f\bar{t}} \quad (3.63)$$

Quindi la banda passante del filtro ideale passa basso è data dall'intervallo  $B = [-f_M, f_M]$ .

Facendo l'antitrasformata della risposta in frequenza, si ottiene la risposta impulsiva:

$$h(t) = 2B\text{sinc}(2B(t - \bar{t})) \quad (3.64)$$

Si osservi che tale risposta impulsiva è rappresentativa di un sistema non causale (infatti è non nulla per  $t < 0$ ) e stabile (cioè limitata).

Inoltre si osserva che tale filtro ideale è anche non distorcente se la banda del segnale di ingresso risulta interamente contenuta nella banda passante del filtro.

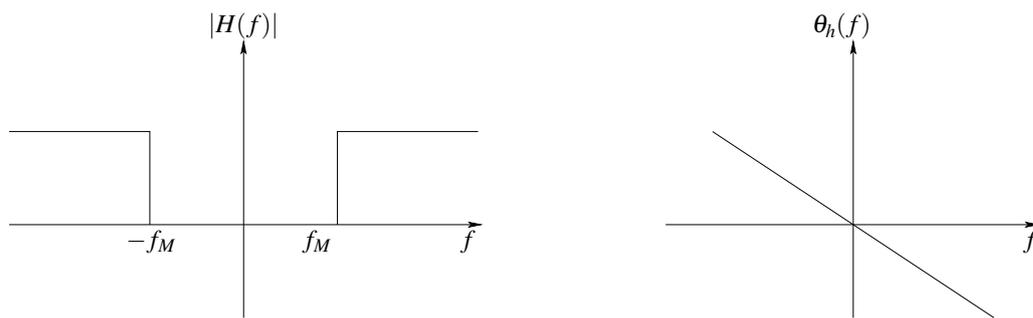


Figura 3.14: Modulo e fase della risposta in frequenza di un filtro passa-alto ideale.

### 3.5.2 Filtro ideale passa-alto

Il filtro ideale passa-alto si comporta in maniera complementare al passa-basso. Si osserva che in questo caso la banda passante risulta di misura infinita.

### 3.5.3 Filtro ideale passa-banda

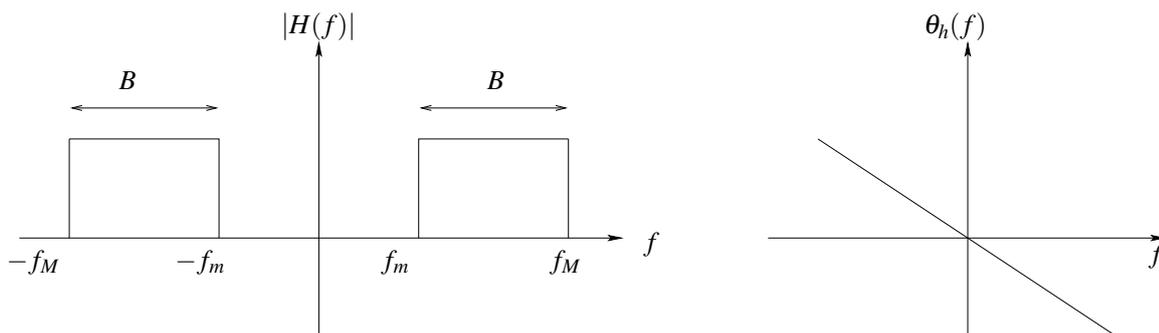


Figura 3.15: Modulo e fase della risposta in frequenza di un filtro passa-banda ideale.

In questo caso la banda passante è finita e si definisce *frequenza di centro banda* la frequenza in cui sono centrate le due rect che costituiscono il modulo della risposta in frequenza:

$$f_C = \frac{f_m + f_M}{2} \quad (3.65)$$

### 3.5.4 Filtro ideale elimina-banda o a reiezione di banda

Questo tipo di filtro ideale permette il passaggio di tutte le frequenze di un segnale di ingresso, ad eccezione di quelle contenute in una certa banda chiamata *banda oscura*:  $B = f_M - f_m$ .

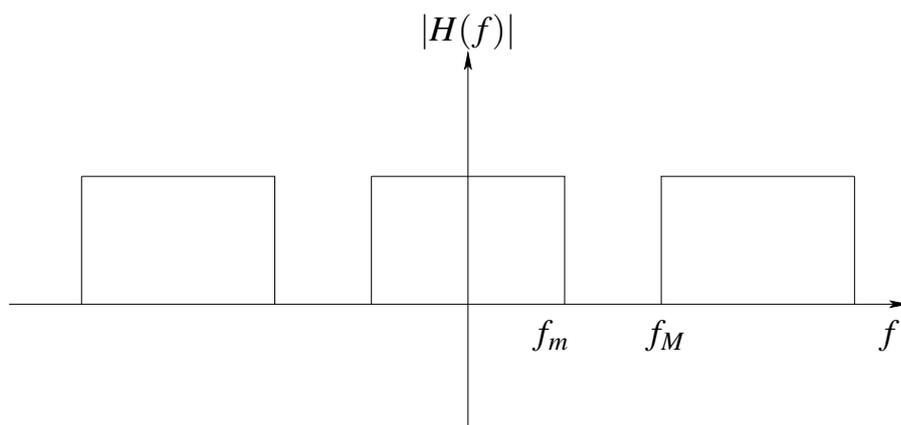


Figura 3.16: Modulo della risposta in frequenza di un filtro ideale a reiezione di banda.



# Capitolo 4

## Correlazione tra segnali

Dati due segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  ad energia finita, si definisce *correlazione mutua* o *cross-correlazione* tra  $x(t)$  e  $y(t)$  il prodotto tra  $x(t)$  e una generica versione traslata di  $y(t)$ :

$$c_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad (4.1)$$

Si osservi che:

- la correlazione mutua può essere vista come una generalizzazione del prodotto interno:

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt \quad (4.2)$$

- inoltre, la correlazione mutua somiglia al prodotto di convoluzione:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)dt \quad (4.3)$$

ma si tenga presente che, mentre il risultato della convoluzione dipende da  $t$ , il risultato dell'operazione di correlazione mutua dipende da  $\tau$ , infatti dalla prima operazione si ottiene un segnale di uscita, mentre con la seconda si vuole sottolineare la traslazione temporale imposta da  $y(t)$ .

### 4.1 Proprietà della correlazione mutua

1.

$$c_{xy}(\tau) = c_{yx}^*(-\tau) \quad (4.4)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} c_{yx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)x^*(t-\tau)dt \stackrel{t'=t-\tau}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} y(t'+\tau)x^*(t')dt' \\ &= \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t')y^*(t'+\tau)x^*(t')dt' \right]^* \\ &= c_{xy}^*(-\tau) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si definisce l'operazione di *autocorrelazione* la correlazione mutua tra un segnale ed una sua generica versione traslata:

$$c_{xx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t-\tau)dt \quad (4.6)$$

alla luce della proprietà appena dimostrata, si può affermare che:

$$c_{xx}(\tau) = c_{xx}^*(-\tau) \quad (4.7)$$

quindi l'operazione di autocorrelazione gode della proprietà di *simmetria Hermitiana*.

2. Se  $x(t)$  e  $y(t)$  sono segnali reali allora  $c_{xy}$  è reale e  $c_{yx}(\tau) = c_{xy}(-\tau)$ . Inoltre, se  $x(t) = y(t)$ , allora  $c_{xx}(\tau) = c_{xx}(-\tau)$ ; quindi, nel caso di segnale reale, l'autocorrelazione è una funzione pari.
3. La correlazione mutua tra  $x(t)$  e  $y(t)$  valutata in 0 è uguale al prodotto interno degli stessi segnali ed è anche nota come *energia mutua*.

$$c_{xy}(0) = (x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = E_{xy} \quad (4.8)$$

Inoltre, considerando l'autocorrelazione di  $x(t)$  nello 0, si ottiene l'energia del segnale  $x(t)$ :

$$c_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = E_x \quad (4.9)$$

Si osservi che:

- $E_x$  è sempre una quantità reale.
- $E_{xy}$  in generale è una quantità complessa e vale  $E_{xy} = E_{yx}^*$ , poiché  $c_{xy}(\tau) = c_{yx}^*(-\tau)$ .
- infine, se  $x(t)$  e  $y(t)$  sono ortogonali, la loro energia mutua è nulla:  $E_{xy} = 0$ .

4. Dato un segnale  $s(t) = x(t) + y(t)$ :

$$E_s = E_x + E_y + 2\Re\{E_{xy}\} \quad (4.10)$$

**Dimostrazione:**

$$\begin{aligned} E_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s^*(t) dt = (s, s) = (x+y, x+y) \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = E_x + E_{xy} + E_{yx} + E_y = E_x + E_y + 2\Re\{E_{xy}\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove l'ultimo termine è il risultato della somma di due numeri complessi e coniugati.

Si dice che i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  sono *incorrelati* se  $c_{xy}(\tau) = 0$  per tutti i valori di  $\tau$ . Quando ciò avviene, si può affermare che  $x(t)$  è ortogonale rispetto a qualunque versione traslata di  $y(t)$  (e viceversa).

Inoltre, dati due segnali incorrelati, l'autocorrelazione del segnale somma  $s(t)$  è semplicemente la somma delle autocorrelazioni dei due segnali:

$$c_{ss}(\tau) = c_{xx}(\tau) + c_{yy}(\tau) \quad (4.12)$$

## 4.2 TCF della correlazione

Supponendo che:

$$x(t) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} X(f) \quad , \quad y(t) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} Y(f)$$

definiamo

$$c_{xy}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt = x(\tau) \otimes y^*(-\tau) \quad (4.13)$$

Applicando le proprietà della trasformata continua di Fourier si può scrivere:

$$y(-\tau) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} Y(-f)$$

$$y^*(\tau) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} Y^*(-f)$$

quindi:

$$c_{xy}(\tau) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} X(f)Y^*(f) \quad (4.14)$$

e inoltre:

$$c_{xx}(\tau) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} X(f)X^*(f) = |X(f)|^2 = e_x(f) \quad (4.15)$$

da cui si deduce che la trasformata continua di Fourier di una funzione che gode della simmetria Hermitiana è una trasformata reale, infatti la funzione  $e_x(f)$  dipende solo dallo spettro di ampiezza del segnale.

$$e_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_{xx}(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau \quad (4.16)$$

$$c_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_x(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad (4.17)$$

$$c_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_x(f)df = E_x \quad (4.18)$$

da cui si deduce che  $e_x(f)$  rappresenta una densità di energia per unità di banda.

### Osservazioni

1.  $e_x(f)$  è una funzione reale di  $f$  e risulta sempre maggiore o uguale a zero.
2.  $e_x(f)$  rappresenta l'energia di  $x(t)$  per unità di banda ed è denominata *densità spettrale di energia*.

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df \quad (4.19)$$

dove questa espressione rappresenta un caso particolare dell'uguaglianza di Parseval.

3. Inoltre, si parla di *densità di energia mutua* quando si considera la trasformata della correlazione mutua:

$$c_{xy}(\tau) \stackrel{\text{TCF}}{\longleftrightarrow} X(f)Y^*(f) = e_{xy}(f) \quad (4.20)$$

$$c_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_{xy}(f)e^{j2\pi f\tau}df \quad (4.21)$$

$$c_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_{xy}(f)df = E_{xy} \quad (4.22)$$

quindi, considerando l'energia mutua, una generalizzazione dell'uguaglianza di Parseval è la seguente:

$$E_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)Y^*(f)df \quad (4.23)$$

### Teorema di Wiener

La funzione densità spettrale di energia ricavata dall'uguaglianza di Parseval è la trasformata continua della correlazione mutua.

Si consideri che la possibilità di portare i segnali nel dominio coniugato permette un grado di libertà in più nello studio della teoria dei segnali.

## 4.3 Caso di sistemi LTI

Nel caso in cui i segnali  $x(t)$  e  $y(t)$  rappresentano rispettivamente l'ingresso e l'uscita di un sistema LTI, si vuole caratterizzare l'uscita anche in termini di correlazione. Sapendo che:

$$y(t) = x(t) \otimes h(t) \xLeftrightarrow{\text{TCF}} Y(f) = X(f)H(f) \quad (4.24)$$

si ricava la correlazione:

$$c_{yx}(\tau) = y(\tau) \otimes x^*(-\tau) = [x(\tau) \otimes h(\tau)] \otimes x^*(-\tau) \quad (4.25)$$

### Primo Caso

Applichiamo in successione le proprietà associativa e commutativa, di cui gode il prodotto di convoluzione:

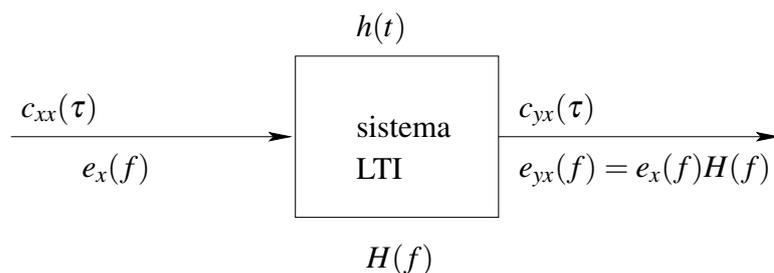
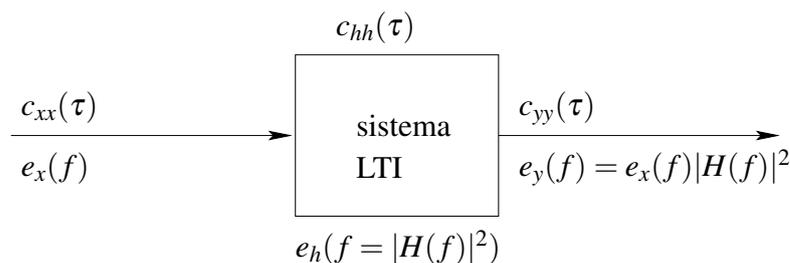
$$c_{yx}(\tau) = [x(\tau) \otimes x^*(-\tau)] \otimes h(\tau) = c_{xx}(\tau) \otimes h(\tau) \quad (4.26)$$

questo risultato si può interpretare supponendo di avere, come ingresso del sistema LTI considerato, l'autocorrelazione del segnale  $x(t)$ , rappresentata nella figura 4.1.

### Secondo Caso

$$\begin{aligned} c_{yy}(\tau) &= y(\tau) \otimes y^*(-\tau) = [x(\tau) \otimes h(\tau)] \otimes [x^*(-\tau) \otimes h^*(-\tau)] \\ &= [x(\tau) \otimes x^*(-\tau)] \otimes [h(\tau) \otimes h^*(-\tau)] \\ &= c_{xx}(\tau) \otimes c_{yy} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Quindi abbiamo ottenuto l'espressione dell'autocorrelazione del segnale di uscita in funzione del segnale di ingresso e della risposta impulsiva del sistema.

Figura 4.1: Autocorrelazione del segnale  $x(t)$ .

## 4.4 Correlazione mutua tra segnali periodici

Supponiamo che  $x(t)$  e  $y(t)$  siano segnali periodici di periodo  $T_0$ , per i quali è nota la trasformata discreta di Fourier:

$$x(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} X_n \quad , \quad y(t) \xleftrightarrow{\text{TSF}} Y_n$$

La correlazione fra segnali periodici dello stesso periodo è data da:

$$c_{xy}(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} x(t)y^*(t-\tau)dt \quad (4.28)$$

si osserva che, pur considerando segnali di potenza, il risultato dell'integrale non presenta problemi di convergenza, perché l'integrazione viene effettuata su un intervallo limitato.

Ora si vuole mettere in relazione la correlazione mutua di segnali periodici con i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier. Per questo si sostituisce nell'espressione della correlazione lo sviluppo in serie di Fourier di  $x(t)$  e  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} c_{xy}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi n t / T_0} \right) \cdot \left( \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Y_m^* e^{j2\pi m (t-\tau) / T_0} \right) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X_n Y_m^* e^{j2\pi m \tau / T_0} e^{j2\pi (n-m)t / T_0} \right) dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X_n Y_m^* e^{j2\pi m \tau / T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} e^{j2\pi (n-m)t / T_0} dt \end{aligned} \quad (4.29)$$

ma l'integrale rappresenta il prodotto interno fra due elementi della base di Fourier periodici di periodo  $T_0$ :

$$\frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} e^{j2\pi (n-m)t / T_0} dt = (\phi_n, \phi_m) = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} \quad (4.30)$$

ne consegue che la correlazione mutua tra due segnali periodici dello stesso periodo è espressa dalla seguente:

$$c_{xy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n Y_n^* e^{j2\pi n\tau/T_0} \quad (4.31)$$

### Osservazioni

1.  $c_{xy}(\tau)$  risulta espressa in termini della trasformata serie di Fourier di  $x(t)$  e  $y(t)$ , quindi si può evitare il calcolo dell'integrale di correlazione.
2. L'espressione ottenuta può essere interpretata come lo sviluppo in serie di Fourier di una funzione periodica di periodo  $T_0$ , dove  $X_n Y_n^*$  rappresenta il generico coefficiente dello sviluppo.

### Caso particolare

Per  $x(t) = y(t)$ , l'autocorrelazione di  $x(t)$  è data da:

$$c_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n\tau/T_0} \quad (4.32)$$

e dipende esclusivamente dallo spettro di ampiezza del segnale  $x(t)$ . Imponendo  $\tau = 0$ , si ottiene una potenza. Inoltre si ricorda che la potenza media temporale di un segnale può essere espressa come segue:

$$c_{xx}(0) = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} x(t)x^*(t)dt = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} |x(t)|^2 dt \quad (4.33)$$

quindi:

$$c_{xx}(0) = P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 = \frac{1}{T_0} \int_{\bar{t}}^{\bar{t}+T_0} |x(t)|^2 dt \quad (4.34)$$

quindi, anche in questo caso, si ottiene una particolare forma dell'uguaglianza di Parseval applicata a segnali periodici. Si osserva che in questa espressione il termine  $|X_n|^2$  rappresenta la potenza dell'armonica di ordine  $n$  del segnale  $x(t)$ .

La trasformata continua di Fourier della funzione di autocorrelazione è espressa come segue:

$$c_{xx}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 e^{j2\pi n\tau/T_0} \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X_n|^2 \delta\left(f - \frac{1}{T_0}\right) \triangleq p_x(f) \quad (4.35)$$

dove  $p_x(f)$  rappresenta una densità spettrale di potenza. La seguente espressione deriva in maniera ovvia:

$$c_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(f) e^{j2\pi n f \tau} df \quad (4.36)$$

di conseguenza la potenza può essere espressa come segue:

$$P_x = c_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_x(f) df \quad (4.37)$$

Infine si osserva che, per un segnale periodico, la densità spettrale di potenza è fisicamente collocata sui multipli di  $1/T_0$  (cioè in corrispondenza delle armoniche), anche se matematicamente è una quantità continua.

# Capitolo 5

## Campionamento

### 5.1 Campionamento di segnali continui

Dato un segnale continuo  $s(t)$ , 5.1, vogliamo rappresentarlo tramite un segnale discreto, cioè mediante una sequenza dei suoi valori. Inoltre richiediamo che l'operazione sia reversibile. Si consideri la funzione:  $c(t) = \text{rep}_T p(t)$ , dove  $p(t) = \text{rect}(t/T)$ , come mostrato nella figura 5.2. Effettuando il prodotto  $s(t) \cdot c(t)$ , si ottiene lo stesso segnale  $s(t)$  ma solo negli intervalli in cui  $c(t)$  vale 1, In questo caso si dice che è stato effettuato un *campionamento naturale uniforme*.

Se si fa tendere a zero la durata  $\tau$  della *rect*, la funziona campionatrice diventa un treno di  $\delta$  di area  $\tau$ , chiamata anche *funzione pettine*, rappresentata nella figura 5.3. Quindi si effettua nuovamente il prodotto del segnale con la funzione campionatrice:

$$s(t)c(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T \delta(t - nT) = Ts(t)\delta(t - nT) = Ts(nT)\delta(t - nT) = s_c(t) \quad (5.1)$$

quindi si ottiene un treno di  $\delta$  aperiodico rappresentato nella figura 5.4. Si osserva che, pur essendo formalmente un segnale continuo,  $s_c(t)$  è equivalente nella sostanza alla sequenza di valori  $s(nT)$  per  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  e quindi può essere considerato un segnale discreto.

La sequenza di valori  $s(nT)$  rappresenta la sequenza di campioni prelevati da  $s(t)$  in corrispondenza dei multipli di  $T$ . In questo caso si parla di *campionamento ideale uniforme*. Il termine *ideale* indica che la funzione campionatrice è ideale (treno di impulsi ideali di Dirac), mentre il termine *uniforme* indica che la funzione campionatrice è costituita da impulsi equispaziati.

Ora ci proponiamo di individuare un procedimento che permetta di riottenere il segnale  $s(t)$  a partire dalla sua versione campionata  $s_c(t)$ , oppure in maniera equivalente dal segnale discreto  $s(nT)$ . Si osserva prima di tutto che, dato il segnale  $s_c(t) = s(t)c(t)$ , se si può associare uno spettro a  $c(t)$ , allora è possibile determinare anche lo spettro di  $s_c(t)$ :

$$s_c(t) \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_c(f) = S(f) \otimes C(f) \quad (5.2)$$
$$c(t) = \text{rep}_T T \delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} T \delta(t - nT) \xleftrightarrow{\text{TCF}} C(f) = \text{rep}_F \delta(f)$$

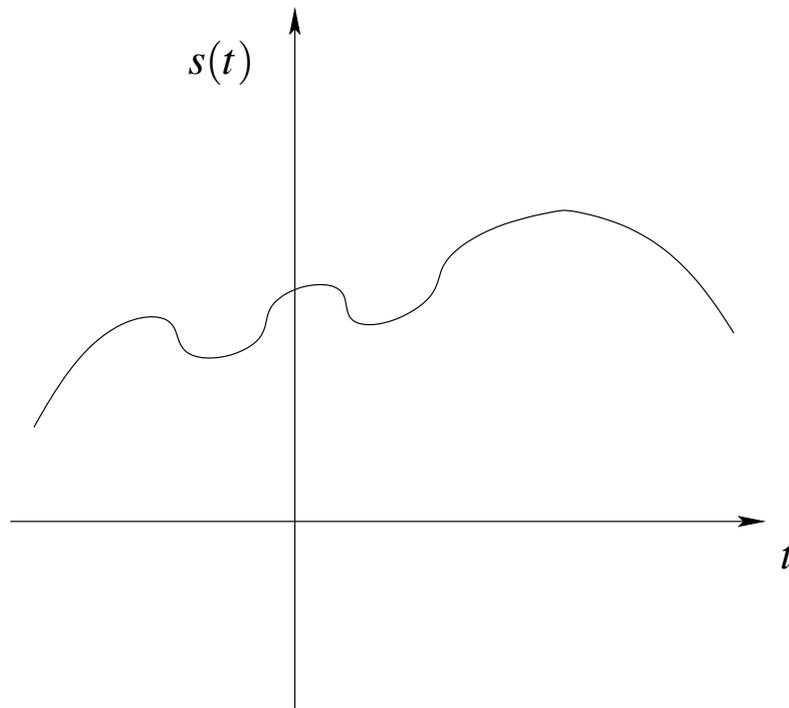


Figura 5.1: Segnale continuo che si desidera campionare.

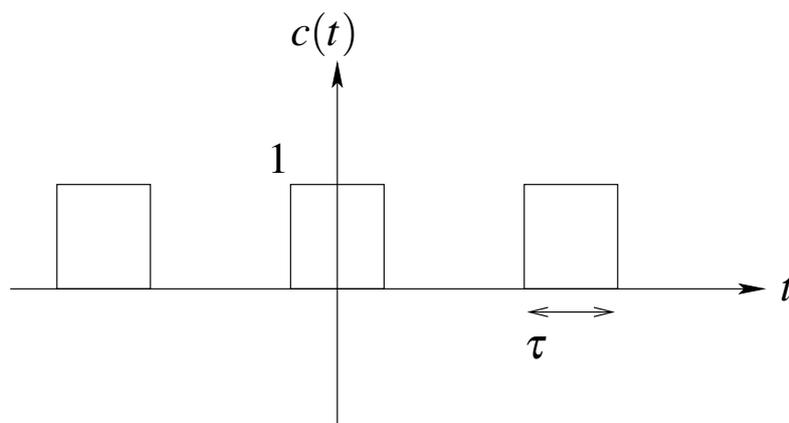


Figura 5.2: Funzione con cui si vuole campionare il segnale continuo  $s(t)$ .

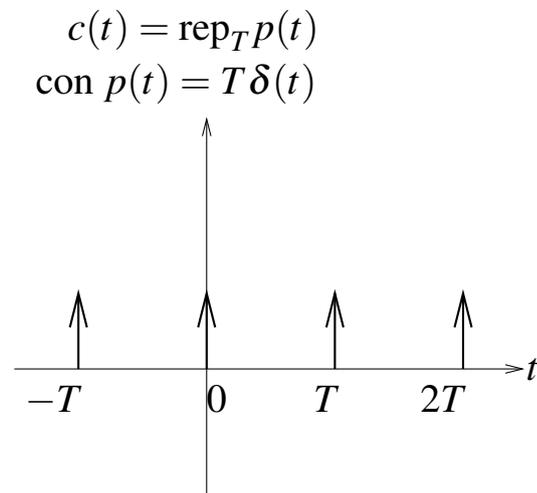
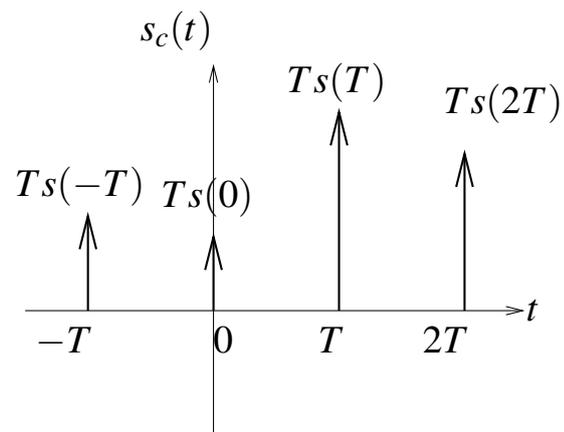


Figura 5.3: Funzione pettine.

Figura 5.4: Segnale  $s(t)$  campionato con la funzione pettine.

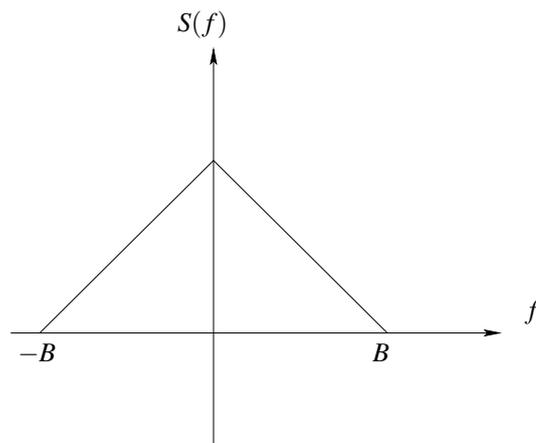


Figura 5.5: Trasformata di Fourier del segnale  $s(t)$  che si vuole campionare.

quindi:

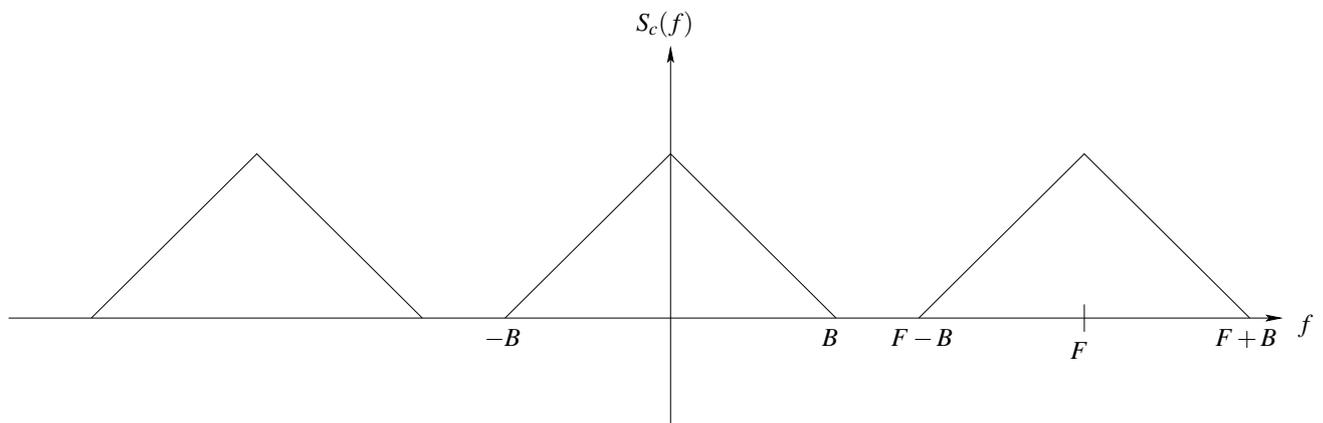
$$\begin{aligned}
 s_c(t) = s(t)c(t) &\stackrel{\text{TCF}}{\iff} S_c(f) = S(f) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nF) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S(f) \otimes \delta(f - nF) \\
 &= \text{rep}_F S(f)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Il risultato ottenuto era prevedibile poichè si potevano effettuare considerazioni sulla dualità. Quindi, *campionare nel tempo equivale a periodicizzare nella frequenza*: l'intervallo di campionamento è  $T$ , la frequenza di campionamento è il suo inverso:  $F = 1/T$ .

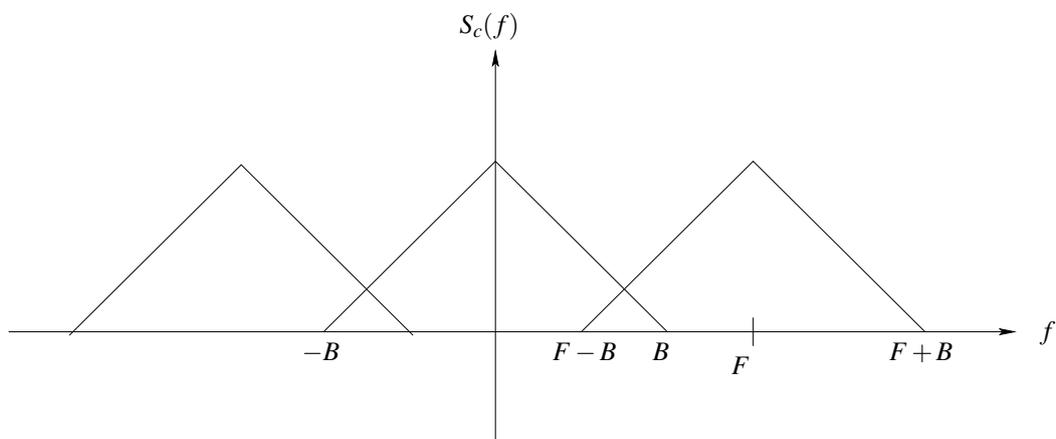
Ora si vuole ricostruire il segnale originario  $s(t)$  a partire da quello campionato  $s_c(t)$ . Per farlo, supponiamo che lo spettro del segnale prima del campionamento sia quello mostrato nella figura 5.5, dove implicitamente assumiamo di considerare un segnale reale e pari con larghezza di banda monolatera pari a  $B$ , quindi a banda limitata.

Periodicizzando lo spettro, si possono verificare due situazioni significative:

1. il caso in cui  $F > 2B$

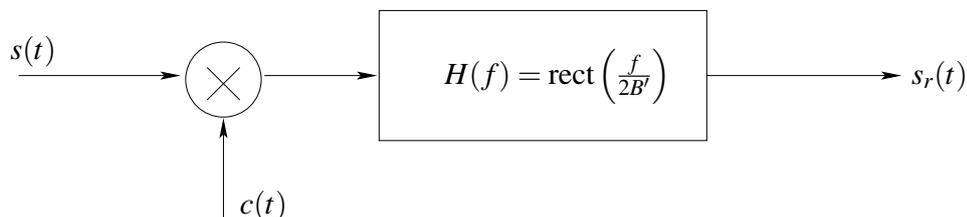


2. il caso in cui  $F \leq 2B$



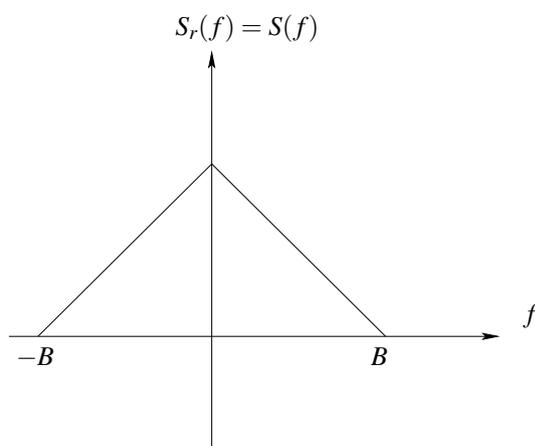
in questo caso si osserva che c'è una sovrapposizione tra le repliche di  $S(f)$ ; tale fenomeno è noto con il nome di *aliasing*.

Volendo ottenere  $S(f)$ , si devono eliminare le repliche dello spettro. Questo si ottiene ponendo subito dopo la modulazione un filtro passa basso che trasforma il segnale con spettro periodico in un segnale con spettro aperiodico:



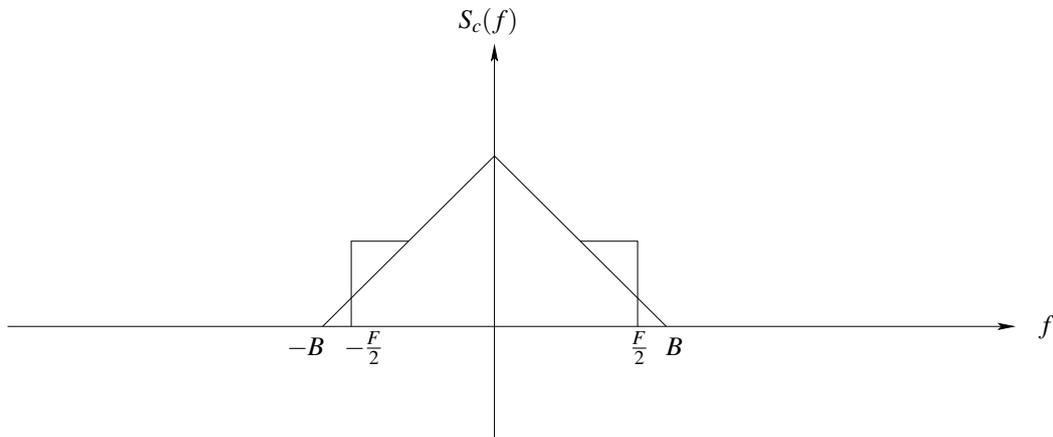
A questo punto, distinguendo di nuovo i due casi, si ottengono i seguenti risultati:

1. Per il filtraggio di repliche non sovrapposte, supponendo che  $B \leq B' \leq F - B$ :



in questo caso si osserva che l'operazione di campionamento è reversibile.

2. Per il filtraggio di repliche con aliasing con  $B' = F/2$ :



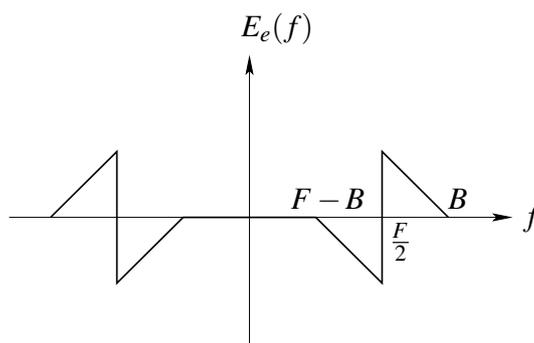
in questo caso l'aliasing ha introdotto una modifica che in generale non è recuperabile. In questo caso, volendo eliminare completamente il fenomeno di aliasing attraverso un'operazione di filtraggio, si elimina anche una parte dello spettro di  $s(t)$  e quindi si introduce distorsione. Quindi, consideriamo l'espressione dell'errore data da:

$$e(t) \triangleq s(t) - s_r(t) \quad (5.4)$$

la sua energia è data da:

$$E_e = \int_{-\infty}^{+\infty} |e(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |E(f)|^2 df \quad (5.5)$$

l'energia dell'errore quantifica l'entità dell'imperfetta ricostruzione di  $s(t)$  a partire dai suoi campioni. Effettuando la trasformata dell'errore, si ottiene un andamento del genere:



# Capitolo 6

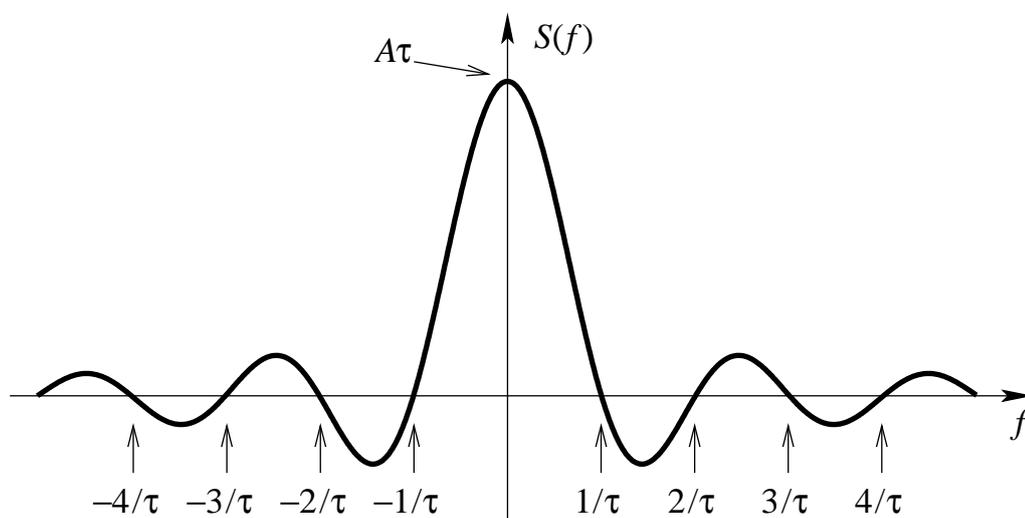
## Esempi

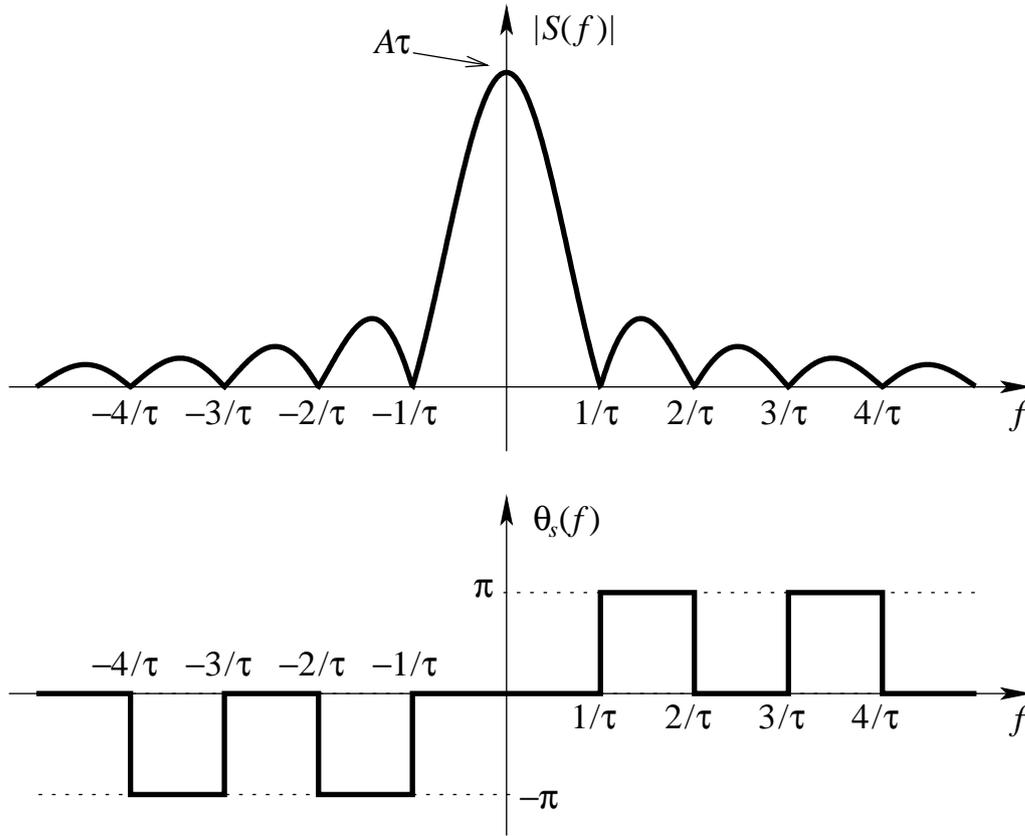
### 6.1 Spettri di ampiezza e di fase dell'impulso rettangolare

Consideriamo l'impulso rettangolare

$$s(t) = A \operatorname{rect}(t/\tau) \quad (6.1)$$

Come abbiamo già visto, la sua TCF è  $S(f) = A\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$ . Gli zeri di  $S(f)$  si hanno per  $\tau f = n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ , quindi per  $f = n/\tau$  con  $n \neq 0$ .





Poiché  $S(f)$  è reale, la fase  $\theta_s(f)$  di  $S(f)$  vale 0 quando  $S(f) > 0$ , e vale  $\pm\pi \pm k \cdot 2\pi$  quando  $S(f) < 0$ . Come abbiamo visto, un segnale reale ha uno spettro  $S(f)$  hermitiano, quindi con modulo pari e fase dispari; per disegnare uno spettro di fase dispari, scegliamo  $+\pi$  per  $S(f) < 0$  e  $f > 0$ , e  $-\pi$  per  $S(f) < 0$  e  $f < 0$  (ovviamente, si potrebbe anche fare la scelta opposta).

Ora vediamo l'effetto sullo spettro di una traslazione tale da far iniziare l'impulso in  $t = 0$ :

$$s_2(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - \tau/2}{\tau}\right) \quad (6.2)$$

Si osserva che  $s_2(t) = s(t - t_0)$  con  $t_0 = \tau/2$ . Sappiamo che

$$s(t - t_0) \xLeftrightarrow{\text{TCF}} e^{-j2\pi f t_0} S(f) \quad (6.3)$$

quindi si ha

$$S_2(f) = e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} S(f) = \underbrace{e^{-j\pi f \tau}}_{=1} \cdot A\tau \operatorname{sinc}(\tau f) \quad (6.4)$$

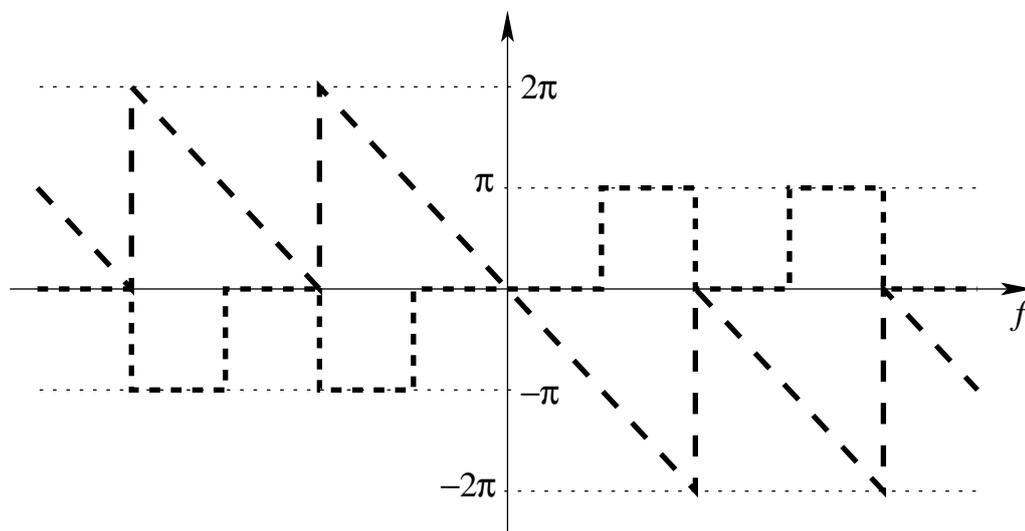
Compare un fattore di fase  $e^{-j\pi f \tau}$ , che non modifica lo spettro di ampiezza, ma somma allo spettro di fase un contributo direttamente proporzionale alla frequenza:

$$\theta_{s_2}(f) = \theta_s(f) + \arg\{e^{-j\pi f \tau}\} = \theta_s(f) - \pi f \tau \quad (6.5)$$

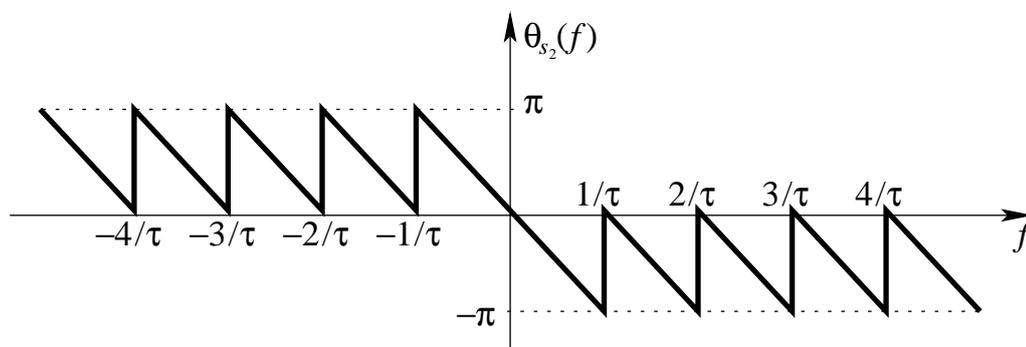
Osserviamo che

$$\pi f \tau|_{f=1/\tau} = \pi \frac{1}{\tau} \tau = \pi \quad , \quad \pi f \tau|_{f=2/\tau} = \pi \frac{2}{\tau} \tau = 2\pi \quad (6.6)$$

Questo vuol dire che il contributo aggiuntivo di fase appena menzionato comporta uno sfasamento di  $\pi$  tra due zeri adiacenti della  $\text{sinc}(\cdot)$  e uno sfasamento di  $2\pi$  ogni due zeri. Poiché possiamo considerare i contributi di fase definiti a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ , al posto di  $-\pi f\tau$  consideriamo un andamento compreso tra  $-2\pi$  e  $0$  per  $f > 0$  e tra  $0$  e  $2\pi$  per  $f < 0$ , come nella seguente figura, nella quale viene nuovamente riportato anche l'andamento  $\theta_s(f)$ :



Sommando i due andamenti disegnati, si ottiene lo spettro di fase  $\theta_{s_2}(f)$ :



Si osserva che, in questo modo, anche per  $\theta_{s_2}(f)$  abbiamo ottenuto, come per  $\theta_s(f)$ , uno spettro di fase dispari.

## 6.2 Spettri di ampiezza e di fase dell'onda quadra

Mantenendo la definizione dell'impulso rettangolare  $s(t)$  data nella sezione precedente, definiamo  $s_p(t)$  come periodizzazione di  $s(t)$  su base  $T_0$ :

$$s_p(t) = \text{rep}_{T_0}\{s(t)\} \quad (6.7)$$

Dal legame tra la TCF e la TSF sappiamo che, in questo caso, per i coefficienti della TSF di  $s_p(t)$ , vale la seguente relazione:

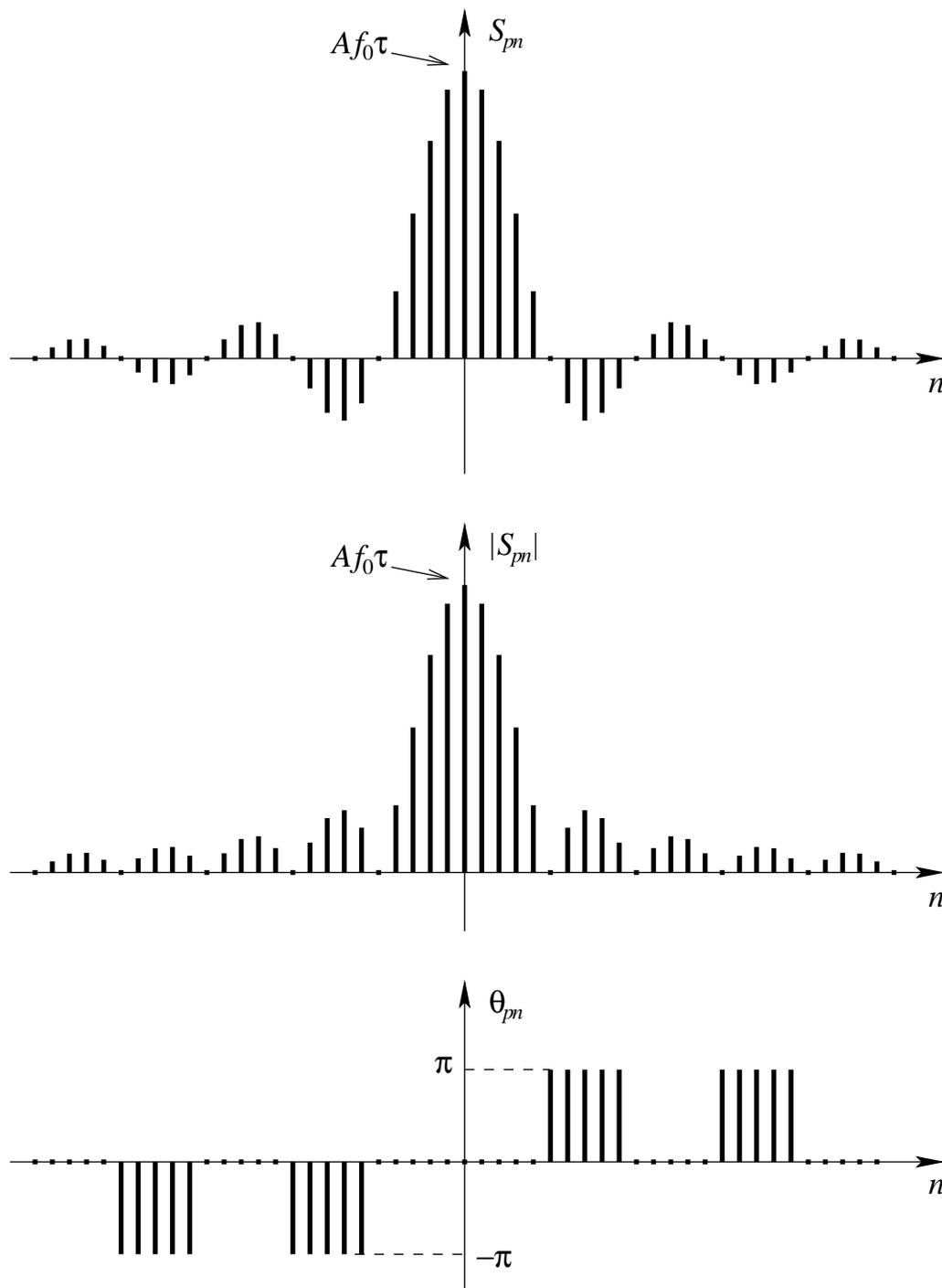
$$S_{pn} = \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) = f_0 S(nf_0) \quad , \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \quad (6.8)$$

Quindi si ha

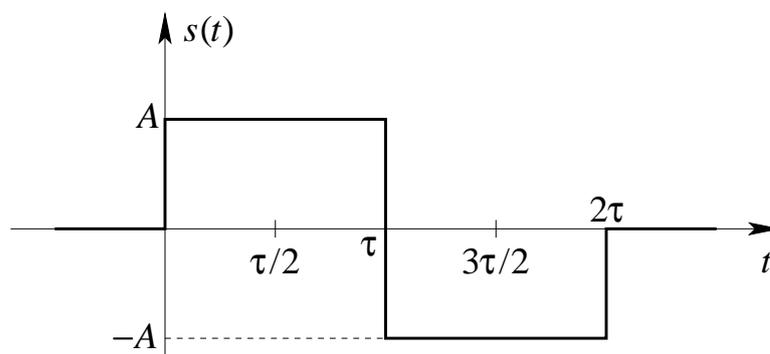
$$S_{pn} = f_0 [A\tau \text{sinc}(\tau f)]|_{f=nf_0} = f_0 A\tau \text{sinc}(\tau n f_0) \quad (6.9)$$

$$S_{pn} = A f_0 \tau \text{sinc}(n f_0 \tau) \quad (6.10)$$

Graficamente, questo corrisponde a un campionamento dello spettro  $S(f)$  opportunamente riscalo secondo il fattore  $f_0$ :



### 6.3 Altro esempio



$$s_3(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ A & \text{per } 0 \leq t < \tau \\ -A & \text{per } \tau \leq t < 2\tau \\ 0 & \text{per } t \geq 2\tau \end{cases} \quad (6.11)$$

Il segnale  $s_3(t)$  può essere espresso come segue:

$$s_3(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}\tau}{\tau}\right) - A \operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{3}{2}\tau}{\tau}\right) \quad (6.12)$$

A questo punto, sfruttiamo la linearità e la proprietà di traslazione della TCF:

$$s(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} S(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f) \quad (6.13)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{1}{2}\tau}{\tau}\right) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} S(f) = e^{-j\pi f \tau} S(f) \quad (6.14)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t - \frac{3}{2}\tau}{\tau}\right) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} e^{-j2\pi f \frac{3}{2}\tau} S(f) = e^{-j3\pi f \tau} S(f) \quad (6.15)$$

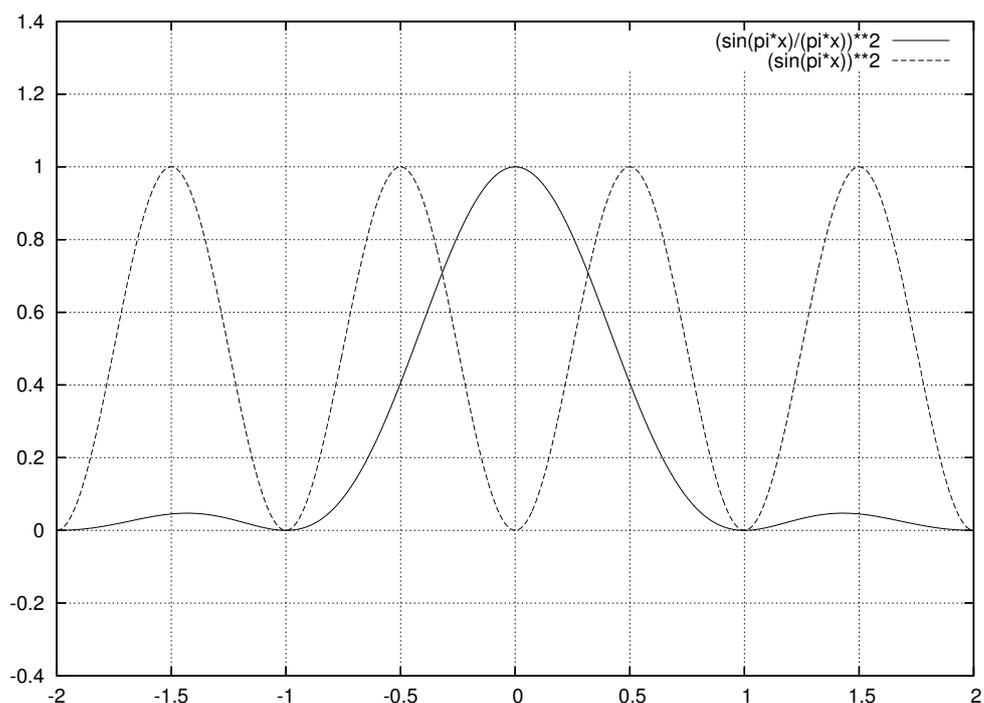
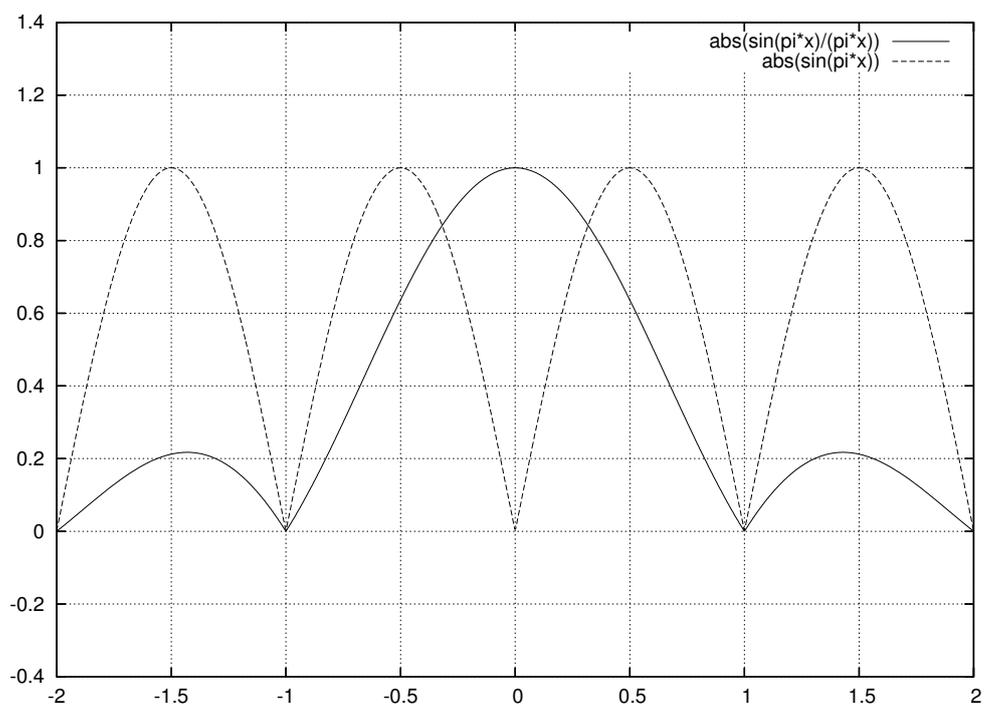
$$\begin{aligned} S_3(f) &= A e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} S(f) = e^{-j\pi f \tau} S(f) - A e^{-j3\pi f \tau} S(f) = e^{-j2\pi f \tau} S(f) (e^{j\pi f \tau} - e^{-j\pi f \tau}) \\ &= 2j e^{-j2\pi f \tau} A S(f) \sin(\pi f \tau) \end{aligned} \quad (6.16)$$

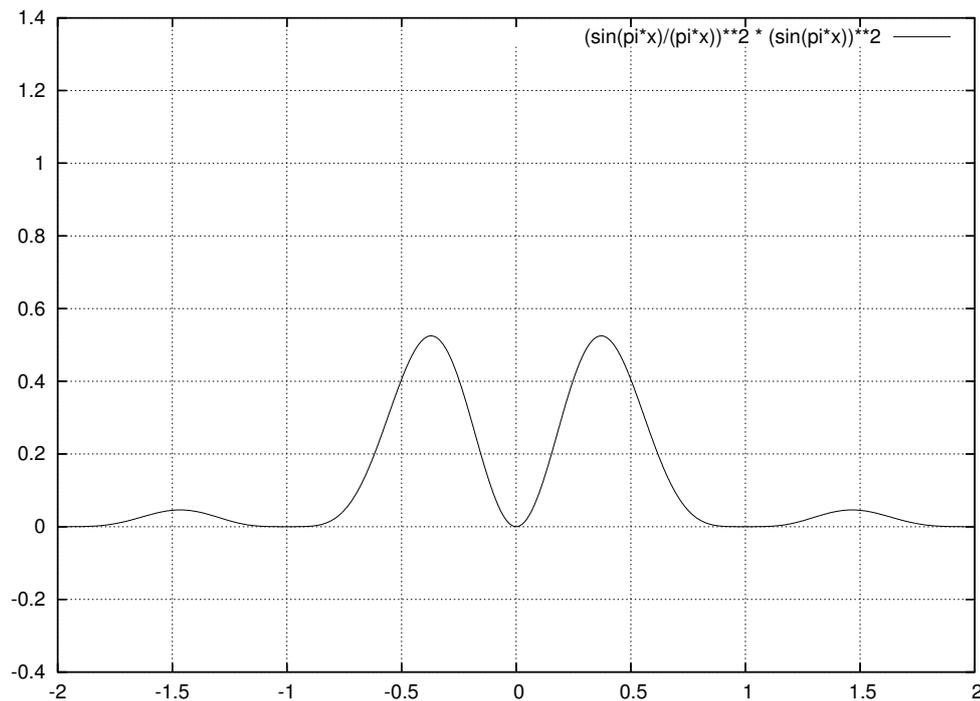
$$\begin{aligned} |S_3(f)|^2 &= 4A^2 |S(f)|^2 \sin^2(\pi f \tau) = 4A^2 |S(f)|^2 \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi f \tau)] \\ &= 2A^2 |S(f)|^2 [1 - \cos(2\pi f \tau)] = 2A^2 \tau^2 \operatorname{sinc}^2(\tau f) [1 - \cos(2\pi f \tau)] \end{aligned} \quad (6.17)$$

Nel calcolo di  $|S_3(f)|^2$  si è tenuto conto che  $\sin(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ . Nell'espressione ottenuta, il fattore nella parentesi quadra si annulla quando il coseno vale 1, cioè quando l'argomento del coseno è un multiplo intero di  $2\pi$ :

$$2\pi f \tau = k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad f \tau = k \quad \Rightarrow \quad f = k \cdot \frac{1}{\tau}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (6.18)$$

quindi il fattore in questione si azzerava in corrispondenza di tutti gli zeri della  $\text{sinc}(\cdot)$  e, in più, per  $f = 0$  (non abbiamo escluso  $k = 0$ ). Questo vuol dire che tale fattore, dovuto alla presenza del secondo impulso rettangolare (quello negativo), oltre a risagomare l'andamento dello spettro di ampiezza, annulla il contenuto spettrale per  $f = 0$  (cioè la componente continua) e rende trascurabili i contenuti spettrali per frequenze piccole, prossime allo zero.





Questo esempio mostra il principio di base della *sagomatura spettrale*; supponiamo che l'informazione che vogliamo trasferire attraverso un canale di comunicazione sia affidata all'ampiezza di un impulso rettangolare; trasmettendo anche un impulso negativo con stessa durata e ampiezza dell'impulso positivo, si effettua una sagomatura in seguito alla quale non è più necessario che il canale di comunicazione trasporti fedelmente anche la componente continua e le componenti spettrali con frequenza prossima allo zero.

## 6.4 Altro esempio

$$s(t) = 2\text{sinc}(Bt) \cos(2\pi f_c t) \quad (6.19)$$

Si ha:

$$s(t) = 2\text{sinc}(Bt) \frac{e^{j2\pi f_c t} + e^{-j2\pi f_c t}}{2} = \text{sinc}(Bt)e^{j2\pi f_c t} + \text{sinc}(Bt)e^{-j2\pi f_c t} \quad (6.20)$$

Così come la TCF di una  $\text{rect}(\cdot)$  è una  $\text{sinc}(\cdot)$ , per dualità, la TCF di una  $\text{sinc}(\cdot)$  è una  $\text{rect}(\cdot)$ :

$$\text{sinc}(Bt) \xleftrightarrow{\text{TCF}} \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f}{B}\right) \quad (6.21)$$

Inoltre, ricordiamo la proprietà della traslazione in frequenza della TCF:

$$e^{j2\pi f_0 t} \xleftrightarrow{\text{TCF}} S(f - f_0) \quad (6.22)$$

Quindi le TCF dei due addendi ottenuti per  $s(t)$  sono

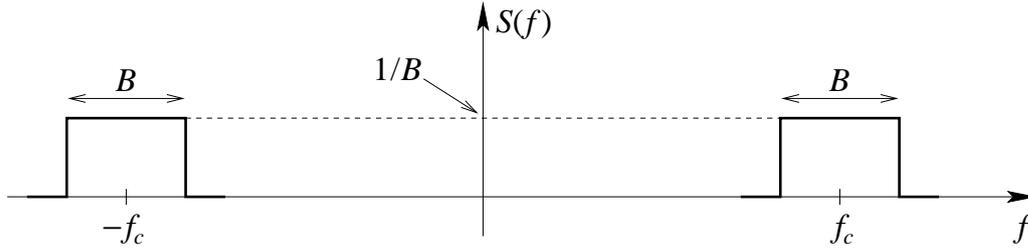
$$\text{sinc}(Bt)e^{j2\pi f_c t} \xleftrightarrow{\text{TCF}} \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f - f_c}{B}\right) \quad (6.23)$$

$$\text{sinc}(Bt)e^{-j2\pi f_c t} \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \frac{1}{B} \text{rect}\left(\frac{f+f_c}{B}\right) \quad (6.24)$$

Per la proprietà di linearità, la TCF di  $s(t)$  è

$$S(f) = \frac{1}{B} \left[ \text{rect}\left(\frac{f+f_c}{B}\right) + \text{rect}\left(\frac{f-f_c}{B}\right) \right] \quad (6.25)$$

Osserviamo che  $S(f)$  è reale e pari, come conseguenza del fatto che  $s(t)$  è reale e pari, essendo il prodotto di due funzioni reali e pari.



## 6.5 Altro esempio

$$s(t) = e^{j2\pi f_c t} \quad (6.26)$$

Si tratta di un segnale di potenza, quindi con energia infinita. Per scriverne la TCF in termini di segnale generalizzato, lo pensiamo come prodotto di 1 per se stesso:

$$s(t) = 1 \cdot e^{j2\pi f_c t} \quad (6.27)$$

e ricorriamo alla proprietà di traslazione in frequenza della TCF, grazie alla quale possiamo affermare che, essendo  $\delta(f)$  la TCF di 1, il prodotto appena scritto ha come TCF la stessa funzione di  $f$ , ma con l'argomento  $f$  sostituito da  $f - f_c$ :

$$1 \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \delta(f) \implies 1 \cdot e^{j2\pi f_c t} \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \delta(f - f_c) \quad (6.28)$$

quindi  $S(f) = \delta(f - f_c)$ . Per convincerci ulteriormente di questo risultato, possiamo effettuare una verifica calcolando la TCF inversa di  $S(f)$ :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi f t} df = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_c) e^{j2\pi f t} df = e^{j2\pi f_c t} \Big|_{f=f_c} = e^{j2\pi f_c t} \quad (6.29)$$

## 6.6 TCF dell'esponenziale unilatero decrescente

$$s(t) = A e^{-t/\tau} u(t) \quad , \quad A, \tau \in \mathbb{R}^+ \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} A e^{-t/\tau} e^{-j2\pi f t} dt = A \int_0^{\infty} e^{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)t} dt \\ &= A \frac{-1}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} e^{-(\frac{1}{\tau} + j2\pi f)t} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{-A}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} \cdot e^{-t/\tau} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi f t}}_{|\cdot| \equiv 1} \Big|_{t=0}^{\infty} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Per  $t \rightarrow \infty$ , l'esponenziale immaginario nell'ultima espressione non converge, continua a "oscillare", ma il suo modulo resta sempre pari a 1; al tempo stesso,  $e^{-t/\tau}$  converge a zero esattamente come  $s(t)$ ; quindi, per  $t \rightarrow \infty$ , il prodotto dei due esponenziali nell'ultima espressione converge a zero; evidentemente, lo stesso prodotto vale 1 per  $t = 0$ , quindi si ha

$$S(f) = \frac{-A}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} \cdot (0 - 1) = \frac{A}{\frac{1}{\tau} + j2\pi f} = \frac{A\tau}{1 + j2\pi f\tau} \quad (6.32)$$

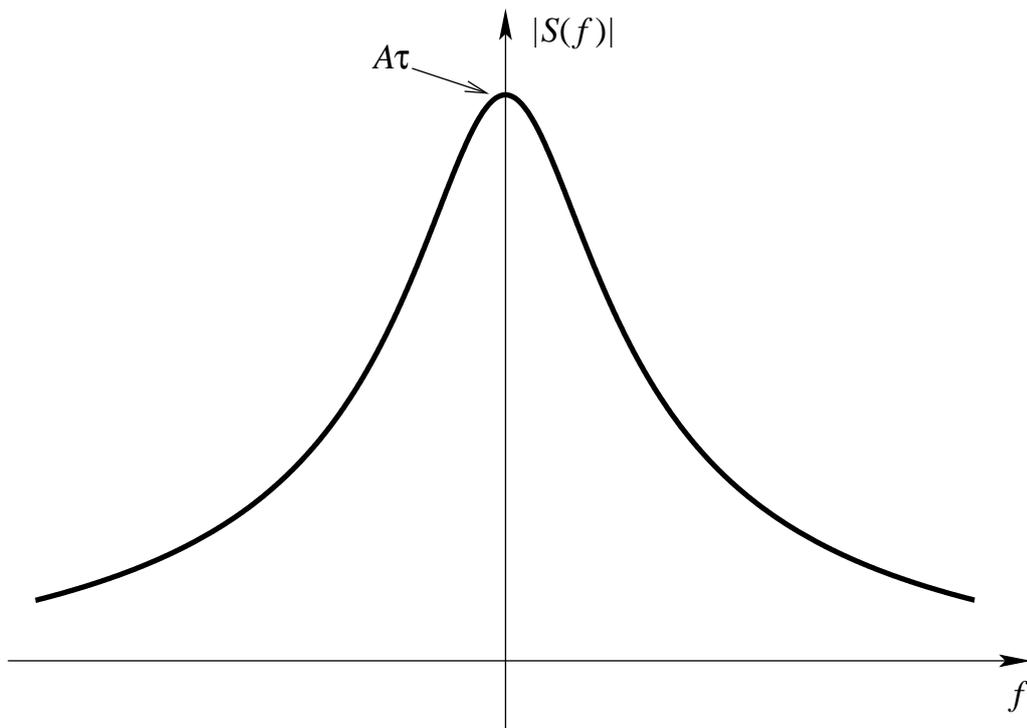
Osserviamo che vale l'hermitianità, come diretta conseguenza del fatto che  $s(t)$  è reale:  $S(-f) = S^*(f)$ .

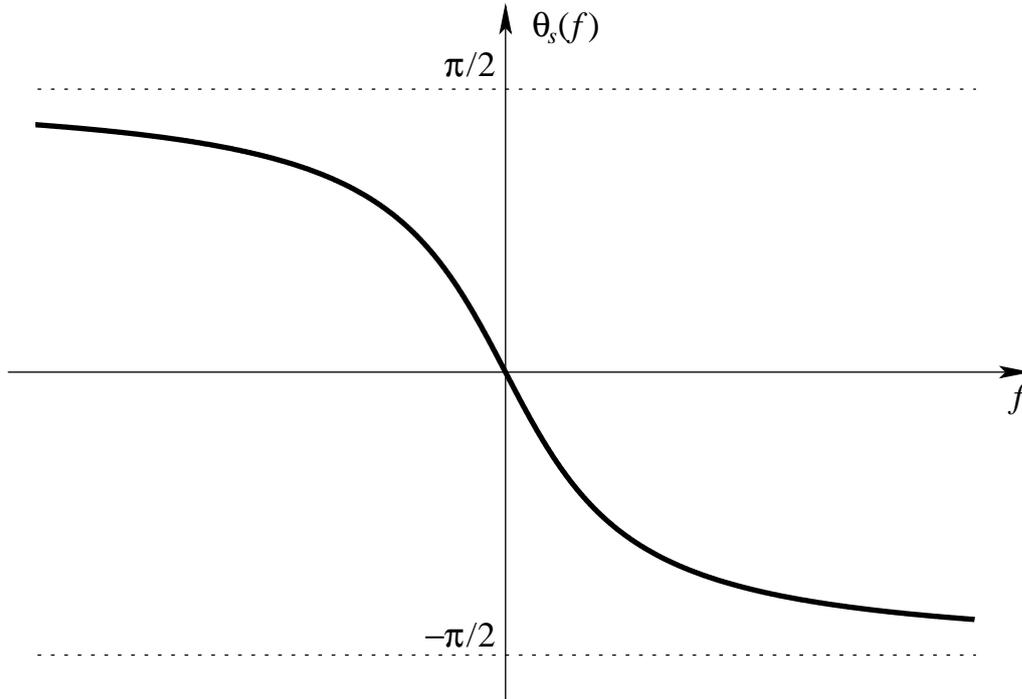
Ricaviamo le espressioni degli spettri di ampiezza e di fase.

$$|S(f)| = \frac{|A\tau|}{|1 + j2\pi f\tau|} = \frac{A\tau}{\sqrt{1 + (2\pi f\tau)^2}} \quad (6.33)$$

$$\arg\{S(f)\} \stackrel{A\tau \in \mathbb{R}^+}{=} -\arg\{1 + j2\pi f\tau\} = -\arctan(2\pi f\tau) \quad (6.34)$$

Lo spettro di ampiezza assume il valore massimo  $A\tau$  per  $f = 0$  e ha un andamento pari e decrescente per frequenze crescenti e positive; per frequenze sufficientemente grandi, decresce secondo l'inverso della frequenza. Lo spettro di fase è dispari e ha un andamento qualitativo analogo ma opposto a quello dell'arcotangente, quindi è compreso tra  $-\pi/2$  e  $\pi/2$  ed è negativo per  $f > 0$  e positivo per  $f < 0$ .





## 6.7 TCF di un treno di impulsi di Dirac

Consideriamo  $s(t) = \delta(t)$  e ne definiamo la periodizzazione su base  $T_0$ :

$$s_p(t) = \text{rep}_{T_0}\{s(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \quad (6.35)$$

$s_p(t)$  è periodico di periodo  $T_0$ , quindi può essere sviluppato in serie di Fourier:

$$\begin{aligned} S_{pn} &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s_p(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \delta(t) e^{-j2\pi nt/T_0} dt \\ &= \frac{1}{T_0} e^{-j2\pi nt/T_0} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T_0} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ovviamente, in questo modo abbiamo ricavato lo stesso risultato che si ottiene sfruttando la relazione

$$S_{pn} = \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) \stackrel{S(f) \equiv 1}{=} \frac{1}{T_0} \quad \forall n \quad (6.37)$$

A questo punto, utilizzando la relazione di sintesi della TSF, possiamo esprimere  $s_p(t)$  come segue:

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{pn} e^{j2\pi nt/T_0} = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/T_0} \quad , \quad (6.38)$$

da cui risulta anche l'uguaglianza notevole di Poisson:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi nt/T_0} \quad (6.39)$$

Abbiamo già visto che

$$e^{j2\pi f_c t} \xleftrightarrow{\text{TCF}} \delta(f - f_c) \quad (6.40)$$

quindi si ha

$$e^{j2\pi n t / T_0} = e^{j2\pi \left(\frac{n}{T_0}\right) t} \xleftrightarrow{\text{TCF}} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (6.41)$$

e, sfruttando la linearità della TCF, possiamo scrivere che

$$s_p(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi n t / T_0} \xleftrightarrow{\text{TCF}} S_p(f) = \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (6.42)$$

Abbiamo così dedotto che un treno di impulsi di Dirac ha come TCF ancora un treno di impulsi di Dirac; in particolare, considerando il caso  $T_0 = 0$ , si osserva che il treno di impulsi

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k) \quad (6.43)$$

è la TCF di se stesso.

Inoltre, osserviamo che si ha

$$S_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{pn} \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} S\left(\frac{n}{T_0}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_0}\right) \quad (6.44)$$

cioè, ancora una volta,  $S_{pn}$  (TSF) e  $S_p(f)$  (TCF) corrispondono al campionamento della TCF  $S(f)$  del segnale  $s(t)$  non periodicizzato; i campioni ottenuti dalla  $S(f)$  devono essere scalati di  $T_0$  per ottenere i coefficienti della TSF, dopodiché, per ottenere  $S_p(f)$ , vengono usati per pesare degli impulsi di Dirac equispaziati di  $f_0 = 1/T_0$ .

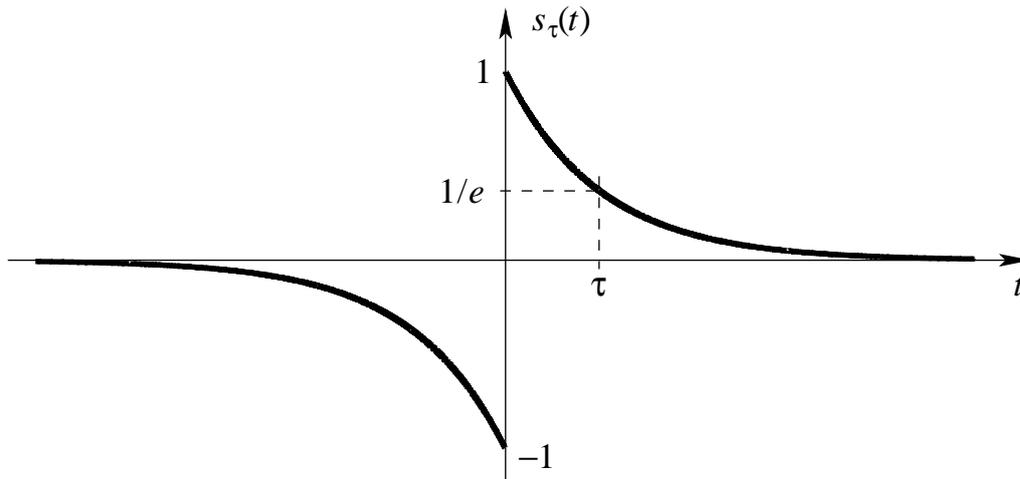
## 6.8 TCF della funzione segno

Ripartiamo dall'esponenziale unilatero decrescente, considerando il caso  $A = 1$ :

$$s(t) = e^{-t/\tau} u(t), \quad A, \tau \in \mathbb{R}^+ \xleftrightarrow{\text{TCF}} S(f) = \frac{\tau}{1 + j2\pi f \tau} \quad (6.45)$$

e definiamo il seguente segnale reale e dispari:

$$s_\tau(t) = s(t) - s(-t) = \begin{cases} -e^{t/\tau} & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \\ e^{-t/\tau} & \text{per } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} -e^{-|t|/\tau} & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \\ +e^{-|t|/\tau} & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (6.46)$$

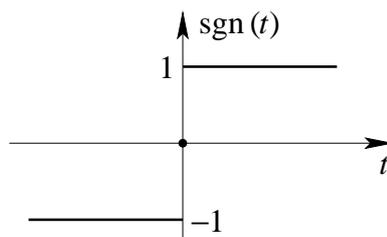


Per le proprietà di linearità e di simmetria della TCF, si ha

$$\begin{aligned}
 S_{\tau}(f) &= S(f) - S(-f) = \frac{\tau}{1 + j2\pi f\tau} - \frac{\tau}{1 - j2\pi f\tau} = \tau \frac{1 - j2\pi f\tau - 1 - j2\pi f\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2} \\
 &= \tau \frac{-j4\pi f\tau}{1 + (2\pi f\tau)^2} = \frac{-j4\pi f\tau^2}{1 + (2\pi f\tau)^2} = \frac{-j4\pi f}{\frac{1}{\tau^2} + (2\pi f)^2}
 \end{aligned} \tag{6.47}$$

Per valori crescenti di  $\tau$ , il decadimento dell'esponenziale diventa sempre più lento sia per  $t > 0$  che per  $t < 0$ , fino ad ottenere l'andamento della funzione  $\text{sgn}(t)$  per  $\tau \rightarrow \infty$ :

$$\text{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} -1 & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \\ +1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \tag{6.48}$$



La corrispondente TCF può essere ottenuta facendo tendere  $\tau \rightarrow \infty$  nell'espressione di  $S_{\tau}(f)$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} S_{\tau}(f) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{-j4\pi f}{\underbrace{\frac{1}{\tau^2}}_{\rightarrow 0} + (2\pi f)^2} = \frac{-j4\pi f}{(2\pi f)^2} = -j \frac{4\pi f}{4\pi^2 f^2} = -j \frac{1}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f} \tag{6.49}$$

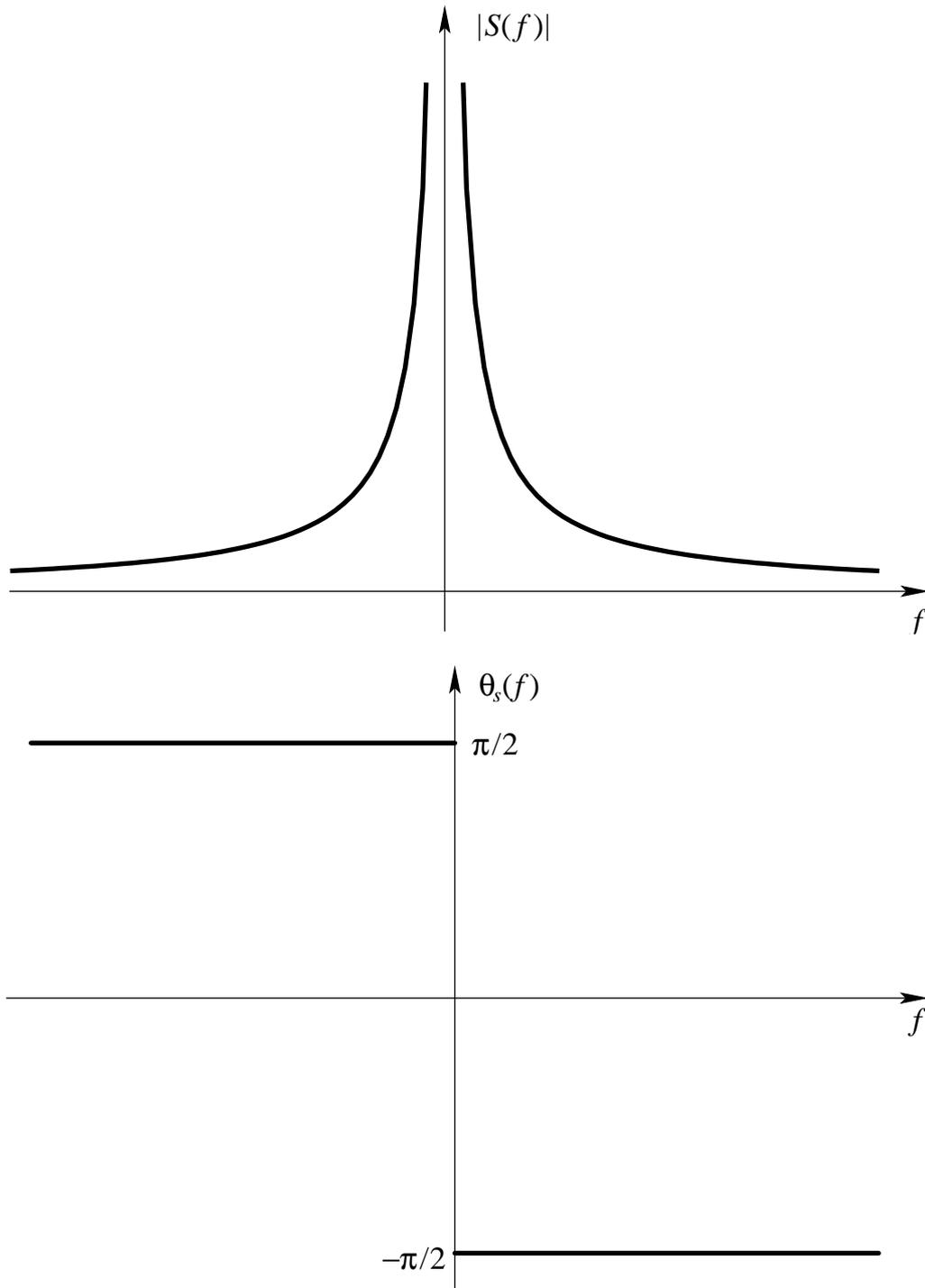
Quindi la TCF di  $\text{sgn}(t)$  è  $1/(j\pi f)$ :

$$\text{sgn}(t) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \frac{1}{j\pi f} \tag{6.50}$$

Ricaviamo le espressioni degli spettri di ampiezza e di fase:

$$\left| \frac{1}{j\pi f} \right| = \frac{1}{|j\pi f|} = \frac{1}{\pi|f|} \quad (6.51)$$

$$\arg \left\{ \frac{1}{j\pi f} \right\} = -\arg\{j\pi f\} = -\arg\{jf\} = \begin{cases} -\pi/2 & \text{per } f > 0 \\ +\pi/2 & \text{per } f < 0 \end{cases} \quad (6.52)$$



**Osservazione:** come conseguenza del fatto che  $s_\tau(t)$  e  $\text{sgn}(t)$  sono reali e dispari, le loro TCF sono immaginarie.

## 6.9 TCF del gradino unitario

Sommiamo una costante pari a 1 alla funzione segno, quindi dividiamo il risultato per 2:

$$\text{sgn}(t) \triangleq \begin{cases} -1 & \text{per } t < 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \\ +1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + \text{sgn}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t = 0 \\ 2 & \text{per } t > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1/2 & \text{per } t = 0 \\ 1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (6.53)$$

A meno del valore nel punto  $t = 0$ , il risultato corrisponde al gradino unitario (che abbiamo definito come pari a 1 in 0). D'altra parte, abbiamo già visto che due segnali che differiscono solo su un insieme di punti di misura nulla, come in questo caso, hanno la stessa TCF; quindi possiamo affermare che la TCF del gradino unitario  $u(t)$  coincide con quella di  $\frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)]$ .

Abbiamo già visto che

$$1 \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \delta(f) \quad (6.54)$$

$$\text{sgn}(t) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \frac{1}{j\pi f} \quad (6.55)$$

quindi, per la linearità della TCF, possiamo scrivere che

$$\frac{1}{2}[1 + \text{sgn}(t)] \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \frac{1}{2} \left[ \delta(f) + \frac{1}{j\pi f} \right] = \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.56)$$

e infine che

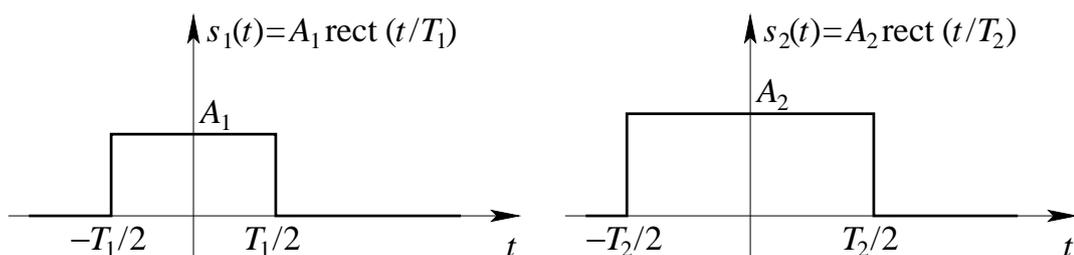
$$u(t) \stackrel{\text{TCF}}{\iff} \frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f} \quad (6.57)$$

# Capitolo 7

## Esempi di calcolo di convoluzioni e correlazioni

### 7.1 Convoluzione tra due rettangoli

Calcoliamo la convoluzione i seguenti segnali rettangolari:

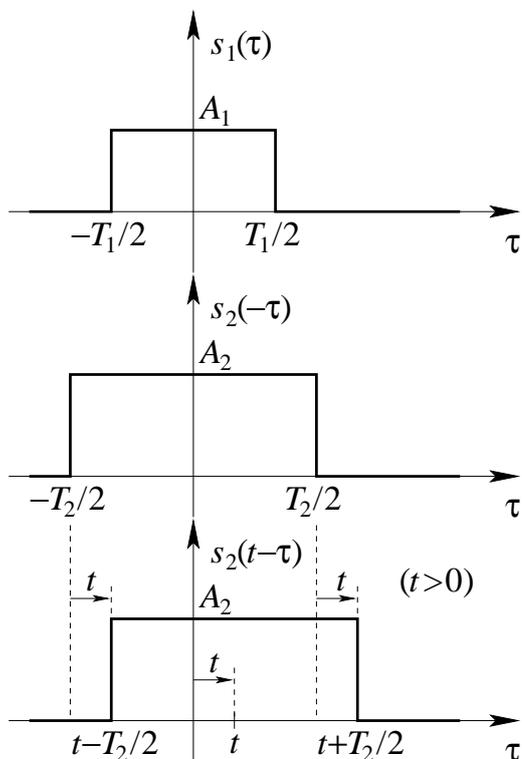


Assumiamo, senza perdita di generalità, che sia  $T_2 \geq T_1$ ; inoltre, nei grafici, per comodità di rappresentazione, si assume  $A_2 > A_1$ , anche se i risultati ottenuti sono del tutto indipendenti da quest'ultima assunzione e sono validi a prescindere da essa. Indichiamo con  $s(t)$  la convoluzione in questione; si ha:

$$s(t) = s_1(t) \otimes s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau \quad (7.1)$$

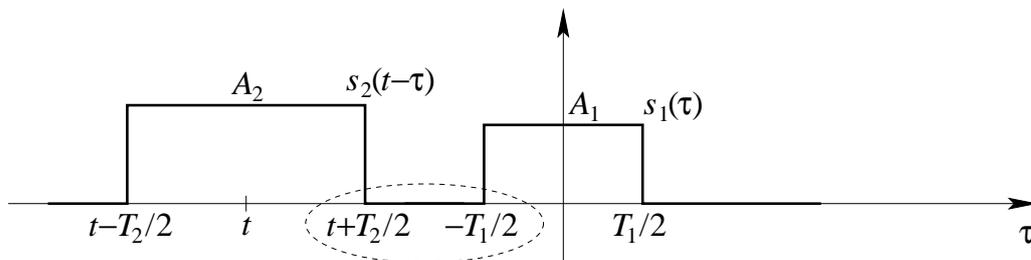
Poiché l'integrale di convoluzione è in  $\tau$ , per illustrare graficamente l'operazione di convoluzione è opportuno riportare i segnali coinvolti usando appunto  $\tau$  come variabile dell'asse temporale. Ci chiediamo quale sia l'andamento di  $s_2(t - \tau)$  rispetto alla variabile temporale  $\tau$ ; poiché  $\tau$  compare nell'argomento di  $s_2(\cdot)$  con un segno “-” davanti, il suo andamento sarà ribaltato rispetto a quello di  $s_2(\tau)$  (nel caso particolare in questione, anche dopo il ribaltamento, l'andamento sarà ancora di forma rettangolare); per capire dove sia centrato tale andamento ribaltato, osserviamo che  $s_2(t - \tau) = s_2[-(\tau - t)]$ ; il “-” che precede la parentesi tonda al secondo membro di questa uguaglianza indica ancora che si tratta di un andamento ribaltato; il contenuto della parentesi tonda indica che l'andamento in questione risulta centrato intorno a  $\tau = t$ , anziché intorno a  $\tau = 0$ . Riassumendo, sull'asse temporale  $\tau$ ,  $s_2(t - \tau)$  risulta ribaltato e centrato intorno a  $\tau = t$ , dove  $t$  è l'istante in corrispondenza del quale si calcola la convoluzione. Quindi, per calcolare graficamente la convoluzione, si disegna  $s_1(\cdot)$  usando  $\tau$  come variabile dell'asse temporale; sotto il grafico così ottenuto, si disegna il segnale  $s_2(\cdot)$  ribaltato e traslato verso destra di  $t$ , dove  $t$  è l'istante per il quale si vuole calcolare la

convoluzione  $s(t)$ ; ovviamente, se  $t > 0$ , l'andamento ribaltato di  $s_2(\cdot)$  risulta traslato verso destra di  $t$ , mentre, se  $t < 0$ , l'andamento ribaltato di  $s_2(\cdot)$  risulta traslato verso sinistra di  $|t| = -t$ .



Con riferimento alla figura appena vista, per il calcolo della convoluzione risulta opportuno distinguere in cinque casi distinti, a seconda del valore di  $t$ .

**CASO 1**



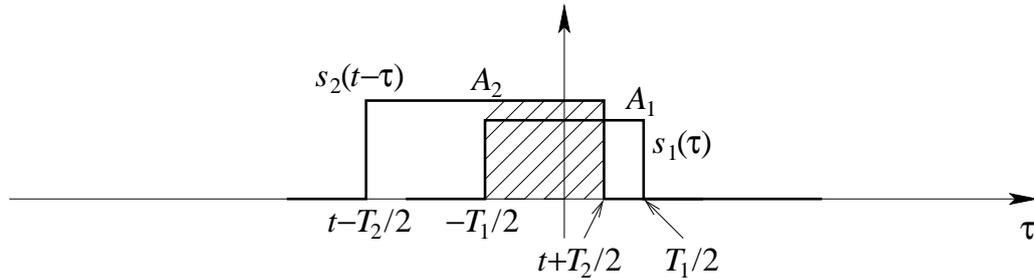
In questo caso, i due rettangoli  $s_1(\tau)$  e  $s_2(t - \tau)$  non si sovrappongono in nessuna parte dell'asse  $\tau$ ; si ha

$$t + \frac{T_2}{2} < -\frac{T_1}{2} \Rightarrow t < -\frac{T_2 + T_1}{2} \tag{7.2}$$

Il prodotto dei due rettangoli è nullo su tutto l'asse reale, quindi l'integrale di convoluzione è nullo:

$$s(t) = 0 \tag{7.3}$$

**CASO 2**



In questo caso si ha

$$-\frac{T_1}{2} \leq t + \frac{T_2}{2} \leq \frac{T_1}{2} \Rightarrow \boxed{-\frac{T_2 + T_1}{2} \leq t \leq -\frac{T_2 - T_1}{2}} \quad (7.4)$$

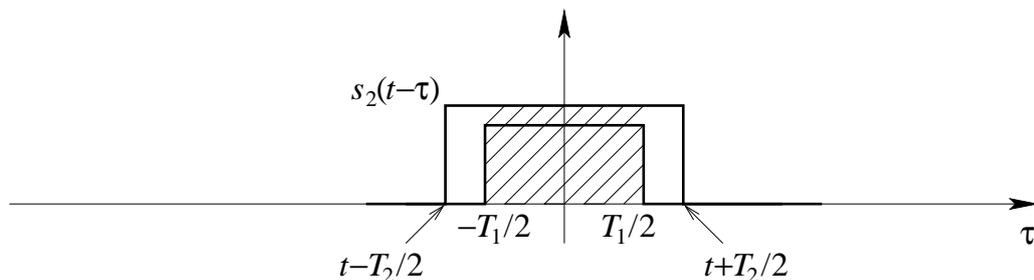
Poiché  $T_2 \geq T_1$ , per nessun valore di  $t$  può accadere che il rettangolo corrispondente a  $s_2(\cdot)$  si sovrapponga completamente con il rettangolo corrispondente a  $s_1(\cdot)$  lasciando sia alla sua destra che alla sua sinistra delle parti di non sovrapposizione con quest'ultimo.

Nel caso che stiamo considerando, come si può osservare dalla figura, la regione di sovrapposizione tra i due rettangoli e, quindi, la regione in cui il prodotto da integrare è non nullo, è compresa tra  $-T_1/2$  e  $t + T_2/2$ , quindi

$$s(t) = \int_{-T_1/2}^{t+T_2/2} A_1 \cdot A_2 d\tau = A_1 A_2 \left[ t + \frac{T_2}{2} - \left( -\frac{T_1}{2} \right) \right] \Rightarrow \quad (7.5)$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = A_1 A_2 \left( t + \frac{T_2 + T_1}{2} \right)} \quad (7.6)$$

### CASO 3



Questo caso si presenta solo se  $T_2$  è strettamente maggiore di  $T_1$ , mentre non si presenta se  $T_2 = T_1$ , cioè se i due rettangoli hanno la stessa durata.

Dalla figura si deduce che

$$\begin{cases} t + \frac{T_2}{2} \geq \frac{T_1}{2} \rightarrow t \geq -\frac{T_2 - T_1}{2} \\ t - \frac{T_2}{2} \leq -\frac{T_1}{2} \rightarrow t \leq \frac{T_2 - T_1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{-\frac{T_2 - T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_2 - T_1}{2}} \quad (7.7)$$

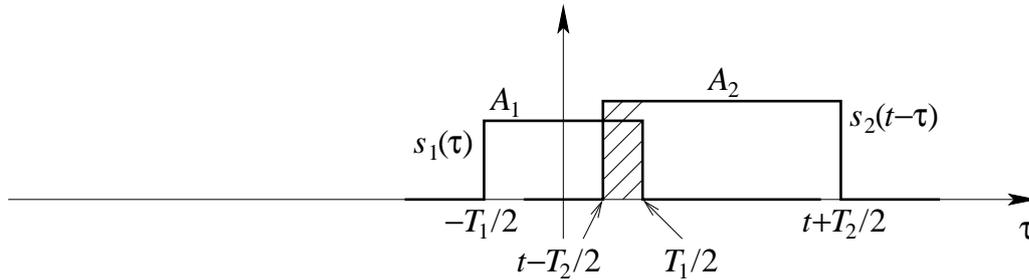
La regione in cui il prodotto da integrare è non nullo, è compresa tra  $-T_1/2$  e  $T_1/2$ , quindi

$$s(t) = \int_{-T_1/2}^{T_1/2} A_1 \cdot A_2 d\tau = A_1 A_2 \left[ \frac{T_1}{2} - \left( -\frac{T_1}{2} \right) \right] \Rightarrow \quad (7.8)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s(t) = A_1 A_2 T_1} \quad (7.9)$$

Quindi, per i valori di  $t$  corrispondenti a questo caso,  $s(t)$  risulta costante.

**CASO 4**



Questo caso si presenta quando il secondo rettangolo ribaltato trasla fino ad avere l'estremo sinistro a destra dell'estremo sinistro del primo rettangolo, ma ancora a sinistra dell'estremo destro del primo rettangolo, cioè quando

$$-\frac{T_1}{2} \leq t - \frac{T_2}{2} \leq \frac{T_1}{2} \Rightarrow \quad (7.10)$$

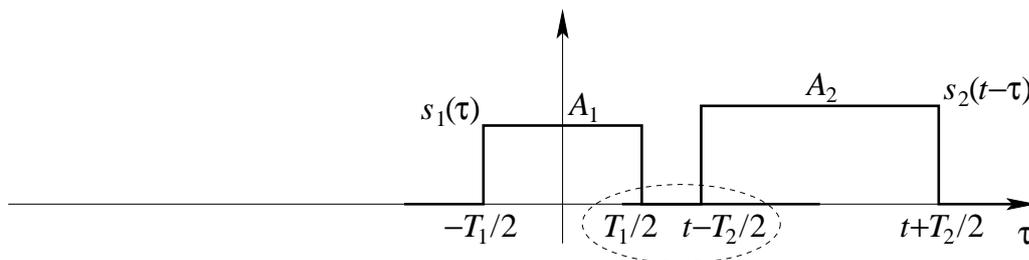
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{T_2 - T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_2 + T_1}{2}} \quad (7.11)$$

Integrando sulla regione di sovrapposizione tra i due rettangoli si ottiene:

$$s(t) = \int_{t-T_2/2}^{T_1/2} A_1 \cdot A_2 d\tau = A_1 A_2 \left[ \frac{T_1}{2} - \left( t - \frac{T_2}{2} \right) \right] \Rightarrow \quad (7.12)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s(t) = A_1 A_2 \left( \frac{T_2 + T_1}{2} - t \right)} \quad (7.13)$$

**CASO 5**



Si torna a non avere sovrapposizione tra i due rettangoli, come nel caso 1; come si vede dalla figura, si ha

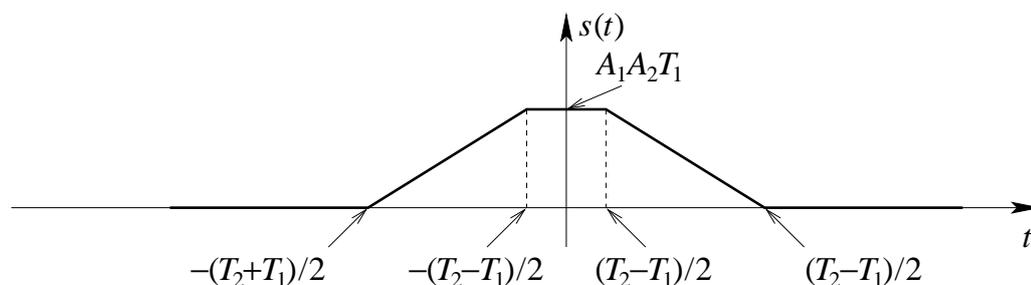
$$t - \frac{T_2}{2} > \frac{T_1}{2} \Rightarrow \boxed{t > \frac{T_2 + T_1}{2}} \quad (7.14)$$

Come nel caso 1, si ha

$$\boxed{s(t) = 0} \quad (7.15)$$

### RIASSUMENDO

$$s(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -\frac{T_2 + T_1}{2} \\ A_1 A_2 \left( t + \frac{T_2 + T_1}{2} \right) & \text{se } -\frac{T_2 + T_1}{2} \leq t \leq -\frac{T_2 - T_1}{2} \\ A_1 A_2 T_1 & \text{se } -\frac{T_2 - T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_2 - T_1}{2} \\ A_1 A_2 \left( \frac{T_2 + T_1}{2} - t \right) & \text{se } \frac{T_2 - T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_2 + T_1}{2} \\ 0 & \text{se } t \geq \frac{T_2 + T_1}{2} \end{cases} \quad (7.16)$$



Ovviamente, se  $T_1 = T_2$ , anziché un trapezio, si ottiene un triangolo.

Si nota che:

- la durata della convoluzione è la somma delle durate, cioè la durata di  $s(t)$  è  $T_2 + T_1$ ;
- l'istante di inizio della convoluzione è la somma degli istanti di inizio dei segnali per i quali si calcola la convoluzione;
- l'istante di fine della convoluzione è la somma degli istanti di fine dei segnali per i quali si calcola la convoluzione.

## 7.2 Autocorrelazione del rettangolo

Consideriamo il segnale rettangolare

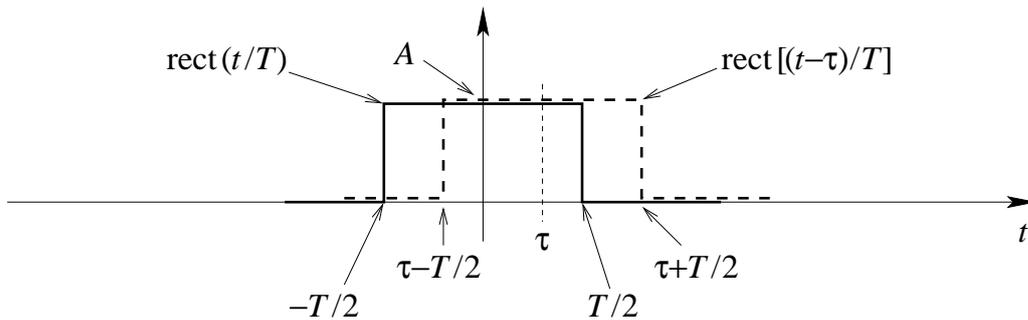
$$s(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} A & \text{se } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{se } |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases} \quad (7.17)$$

La sua autocorrelazione è

$$c_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t - \tau) dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t - \tau}{T}\right) dt \quad (7.18)$$

Poiché  $s(t)$  è reale,  $c_{ss}(\tau)$  è pari, quindi inizialmente si considera solo  $\tau \geq 0$ .

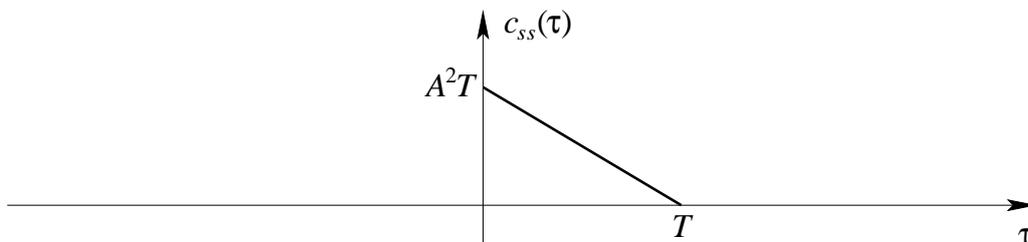
Consideriamo il caso  $0 \leq \tau \leq T$ .



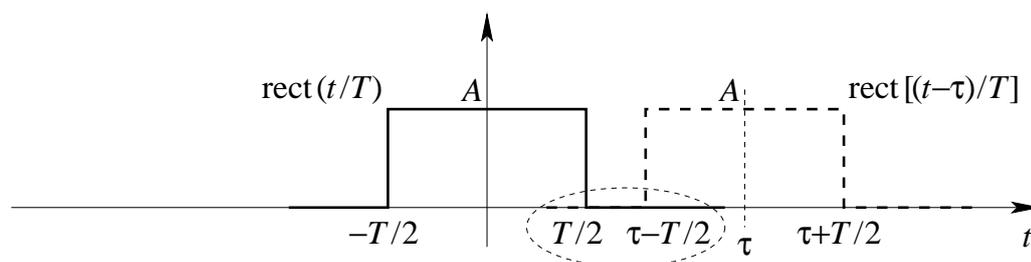
Come si vede dalla figura, l'intervallo comune alle due  $\operatorname{rect}(\cdot)$  è  $(\tau - T/2, T/2)$ , quindi

$$c_{ss}(\tau) = \int_{\tau - T/2}^{T/2} A \cdot A dt = A^2 [T/2 - (\tau - T/2)] = A^2(T - \tau) \quad (7.19)$$

e si ottiene un andamento linearmente decrescente; agli estremi dell'intervallo considerato per  $\tau$  si ha  $c_{ss}(\tau) = T$  per  $\tau = 0$  e  $c_{ss}(\tau) = 0$  per  $\tau = T$ , come illustrato dalla seguente figura.



Consideriamo il caso  $\tau > T$ .



Come si vede dalla figura, non c'è sovrapposizione, quindi il prodotto delle due  $\text{rect}(\cdot)$  è nullo su tutto l'asse reale e l'integrale di correlazione è zero:  $c_{ss}(\tau) = 0$ .

Riassumendo i due casi considerati, per  $\tau \geq 0$  si ha

$$c_{ss}(\tau) = \begin{cases} A^2(T - \tau) & \text{se } 0 \leq \tau \leq T \\ 0 & \text{se } \tau > T \end{cases} \quad (7.20)$$

A questo punto si tiene presente che  $c_{ss}(\tau)$  è una funzione pari e si considerano i seguenti casi:

- per  $-T \leq \tau \leq 0$  si ha  $c_{ss}(\tau) = c_{ss}(-\tau)$ , con  $0 \leq -\tau \leq T$ , quindi

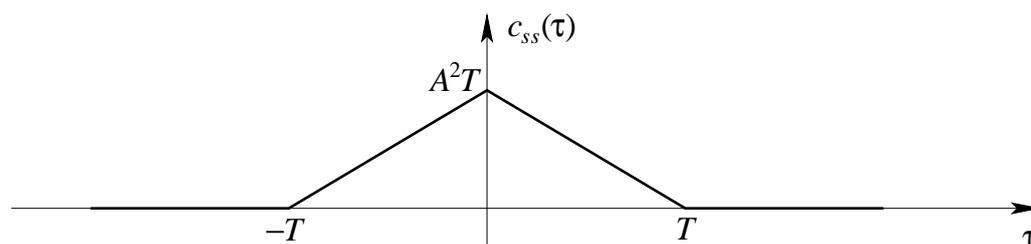
$$c_{ss}(\tau) = c_{ss}(-\tau) = A^2[T - (-\tau)] = A^2(T + \tau) = A^2(T - |\tau|) \quad (7.21)$$

e quest'ultima espressione è valida anche per  $0 \leq \tau \leq T$ , intervallo nel quale evidentemente si ha  $|\tau| = \tau$ .

- per  $\tau < -T$  si ha  $c_{ss}(\tau) = c_{ss}(-\tau)$ , con  $-\tau > T$ , quindi si ha  $c_{ss}(\tau) = 0$ .

Riassumendo, si può scrivere che

$$c_{ss}(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|) & \text{se } |\tau| \leq T \\ 0 & \text{se } |\tau| > T \end{cases} \quad (7.22)$$

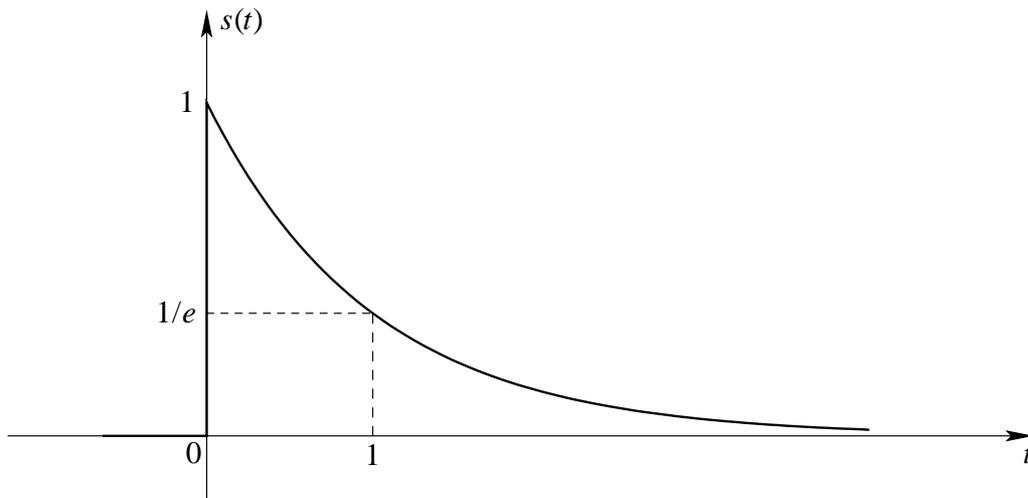


Si nota che l'autocorrelazione  $c_{ss}(\tau)$  ha durata  $2T$ , doppia della durata  $T$  di  $s(t)$ , come ci si aspettava.

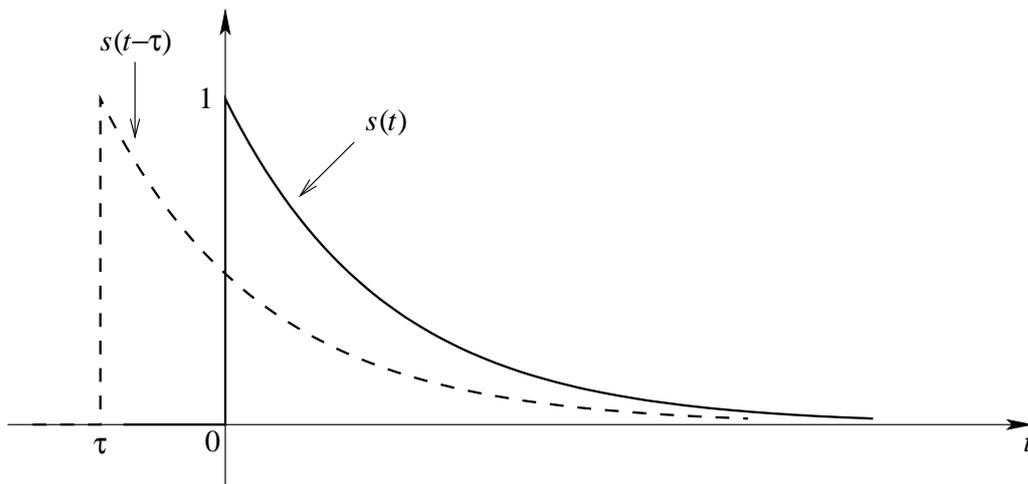
### 7.3 Autocorrelazione dell'esponenziale unilatero

Valutiamo l'autocorrelazione dell'esponenziale unilatero

$$s(t) = e^{-t}u(t) \quad (7.23)$$



Poiché  $r_{ss}(\tau)$  è pari, inizialmente consideriamo solo il caso  $\tau \leq 0$ .

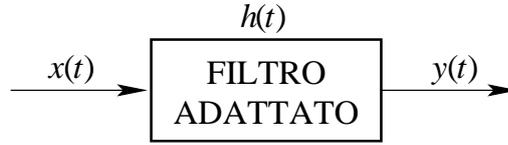


$$\begin{aligned}
 c_{ss}(\tau) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)dt = \int_0^{\infty} e^{-t}e^{-(t-\tau)}dt \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-(t+t-\tau)}dt = e^{\tau} \int_0^{\infty} e^{-2t}dt = e^{-|\tau|} \left. \frac{-1}{2t} e^{-2t} \right|_0^{\infty} = \frac{e^{-|\tau|}}{2} \cdot \left. \frac{-e^{-2t}}{t} \right|_0^{\infty} \\
 &= \frac{e^{-|\tau|}}{2} \cdot (-0 + 1) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|}
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

L'espressione ottenuta corrisponde già a una funzione pari di  $\tau$ , quindi, sia per  $\tau$  positivi che per  $\tau$  negativi, si può scrivere

$$\boxed{c_{ss}(\tau) = \frac{1}{2} e^{-|\tau|}} \tag{7.25}$$

## 7.4 Filtro adattato



Si considera un sistema, indicato nella figura come *filtro adattato*, la cui risposta impulsiva è definita come segue:

$$h(t) = x^*(t_0 - t) \quad (7.26)$$

dove  $x(t)$  è una particolare forma d'onda da "riconoscere", a cui si vuole "adattare" il filtro in questione. Perché il filtro così definito sia fisicamente realizzabile, è necessario rispettare il vincolo di causalità, che impone

$$h(t) = x^*(t_0 - t) = 0 \text{ per } t < 0 \quad (7.27)$$

Effettuando la sostituzione  $t' = t_0 - t$ , si deduce che deve essere

$$x(t') = 0 \text{ per } \begin{cases} t' = t_0 - t \\ t < 0 \end{cases} \Rightarrow x(t') = 0 \text{ per } t' > t_0 \quad (7.28)$$

Questo vuol dire che

- $x(t)$  deve essere nullo per  $t$  sufficientemente grande;
- $t_0$  deve essere scelto sufficientemente grande, in modo da cadere in una regione in cui  $x(t)$  si è già definitivamente annullato.

Nel caso in cui  $x(t)$  sia un segnale che decresce a partire da un certo istante, senza però mai raggiungere lo zero (ad esempio nel caso in cui lo zero sia un asintoto di  $x(t)$  per  $t \rightarrow \infty$ ),  $t_0$  deve essere scelto sufficientemente grande, in modo da poter trascurare la "coda" di  $x(t)$  per  $t > t_0$ .

L'uscita del filtro ha la seguente espressione:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(t_0 - (t - \tau))d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau + t_0 - t)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau - (t - t_0))d\tau \end{aligned} \quad (7.29)$$

Ricordiamo e manipoliamo l'espressione dell'autocorrelazione di  $x(t)$ :

$$c_{xx}(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t - \tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)x^*(\xi - \tau)d\xi \Rightarrow \quad (7.30)$$

$$\Rightarrow c_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)x^*(\xi - t)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)x^*(\tau - t)d\tau \quad (7.31)$$

Per confronto con l'espressione ottenuta per  $y(t)$ , si deduce che

$$y(t) = c_{xx}(t - t_0) \quad (7.32)$$

Quindi si ha

$$y(t_0) = c_{xx}(t_0 - t_0) = c_{xx}(0) = E_x \quad (7.33)$$

In pratica, il filtro adattato compie una correlazione tra il segnale di ingresso e il segnale  $x(t)$  che si vuole "riconoscere"; quando tale correlazione assume un valore molto grande, si può assumere di avere avuto in entrata proprio la forma d'onda a cui il filtro è adattato.

## 7.5 Soluzione dell'esercizio 8 della prima parte

### Punto 1

Si ha

$$h(t) = x(T - t) = x(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad (7.34)$$

$h(t)$  corrisponde a un sistema che, oltre ad essere LTI, è

- causale:  $h(t) = 0$  per  $t < 0$ ;
- stabile:  $h(t)$  è limitata e di durata finita.

Il sistema compreso tra  $x(t)$  e  $y_1(t)$  è caratterizzato dalla relazione ingresso–uscita  $y_1(t) = x(t) + x(t - T)$ , quindi è evidentemente LTI, cosicché si può determinare la corrispondente risposta impulsiva  $h_1(t) = \delta(t) + \delta(t - T)$ , che gode delle seguenti proprietà:

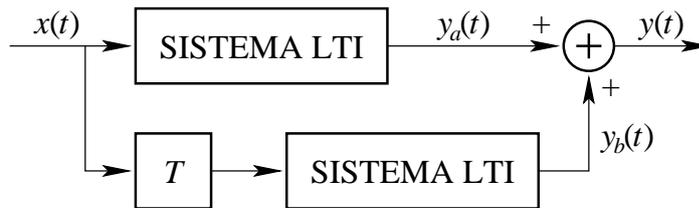
- causalità:  $h_1(t) = 0$  per  $t < 0$ ;
- stabilità:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h_1(t)| dt = 2 < \infty \quad (7.35)$$

Quindi l'intero sistema è la cascata di due sistemi LTI, causali e stabili, ed è a sua volta un sistema LTI, causale e stabile.

### Punto 2

Poiché il sistema descritto da  $h(t)$  è LTI, vale l'equivalenza tra l'intero sistema e il seguente schema a blocchi:



Si ha:

$$\begin{aligned} y_a(t) &= x(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(T - (t - \tau)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(\tau + T - t) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) x(\tau - (t - T)) d\tau \stackrel{c_{xx}(\cdot) \text{ reale}}{=} c_{xx}(t - T) \end{aligned} \quad (7.36)$$

dove  $c_{xx}(\tau)$  è l'autocorrelazione di un rettangolo di ampiezza  $A = 1$  e di durata  $T$ :

$$c_{ss}(\tau) = \begin{cases} T - |\tau| & \text{se } |\tau| \leq T \\ 0 & \text{se } |\tau| > T \end{cases} \quad (7.37)$$

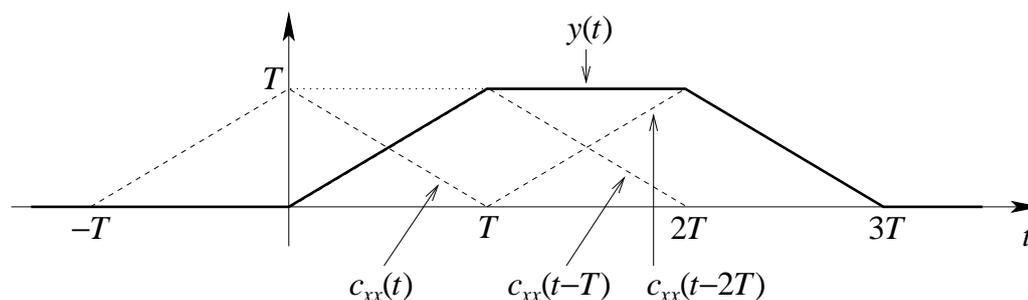
Inoltre, poiché il sistema descritto da  $h(t)$  è LTI, se  $y_a(t)$  è la risposta a  $x(t)$ , allora la risposta  $y_b(t)$  a  $x(t-T)$  è  $y_a(t-T)$ :

$$y_b(t) = y_a(t-T) = c_{xx}(t-2T) \quad (7.38)$$

Quindi, complessivamente,

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = y_a(t) + y_a(t-T) = c_{xx}(t-T) + c_{xx}(t-2T) \quad (7.39)$$

Graficamente:



Come si vede dalla figura, si ha

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ t & \text{se } 0 \leq t \leq T \\ T & \text{se } T \leq t \leq 2T \\ 3T - t & \text{se } 2T \leq t \leq 3T \\ 0 & \text{se } t > 3T \end{cases} \quad (7.40)$$

### Punto 3

$y(t)$  può essere vista come la convoluzione tra i segnali

$$x_1(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T/2}{T}\right), \quad x_2(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T}{2T}\right) \quad (7.41)$$

quindi la sua TCF  $Y(f)$  è il prodotto delle TCF di  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ :

$$Y(f) = X_1(f) \cdot X_2(f) \quad (7.42)$$

$X_1(f)$  è la TCF di un impulso rettangolare di durata  $T$  e il cui centro è ritardato di  $T/2$  rispetto all'origine:

$$X_1(f) = e^{-j2\pi f T/2} \cdot T \text{sinc}(fT) = e^{-j\pi f T} T \text{sinc}(fT) \quad (7.43)$$

$X_2(f)$  è la TCF di un impulso rettangolare di durata  $2T$  e il cui centro è ritardato di  $T$  rispetto all'origine:

$$X_2(f) = e^{-j2\pi f T} \cdot 2T \text{sinc}(f \cdot 2T) = e^{-j2\pi f T} 2T \text{sinc}(2fT) \quad (7.44)$$

Quindi

$$\begin{aligned} Y(f) &= X_1(f) \cdot X_2(f) = e^{-j\pi f T} T \text{sinc}(fT) \cdot e^{-j2\pi f T} 2T \text{sinc}(2fT) \\ &= \underbrace{e^{-j3\pi f T}}_{|\cdot| \equiv 1} \cdot 2T^2 \cdot \text{sinc}(fT) \cdot \text{sinc}(2fT) \end{aligned} \quad (7.45)$$

e lo spettro di energia di  $y(t)$  è

$$\boxed{4T^4 \operatorname{sinc}^2(fT) \operatorname{sinc}^2(2fT)} \quad (7.46)$$