Equazioni di primo grado ad una incognita

Prendiamo in esame le due espressioni numeriche $\underline{5+3\cdot 4}$ e $\underline{3^2+8}$ entrambe sono uguali a 17, e la scrittura $\underline{5+3\cdot 4=3^2+8}$ si chiama uguaglianza numerica.

Le uguaglianza: 1) $\underline{3+x-1=2x+2-x}$

2) $\underline{2x-1=x+2}$

sono uguaglianze letterali e sono rispettivamente soddisfatte, come si può facilmente verificare, la prima per qualsiasi valore di x $(\forall\, x \in R)$ e la seconda solo per $x=3$ (sostituendo $2\cdot 3-1=3+2 \Rightarrow 5=5$ è vero quindi l'uguaglianza è verificata).

Identità

"Una uguaglianza tra due espressioni algebriche (espressioni letterali), in una o più variabili (*x y z* …), che risulti verificata qualsiasi siano i valori numerici attribuiti alle variabili che in essa figurano".

Equazioni

"Una uguaglianza tra due espressioni algebriche, in una o più variabili, che risulti verificata solamente per particolari valori attribuiti alle variabili che in essa figurano".

Le due espressioni letterali, separate dal simbolo di uguaglianza, sono dette rispettivamente primo e secondo membro.

I monomi presenti nelle espressioni algebriche sono detti termini della equazione. La lettera (o le lettere) che è presente nell'equazione è detta incognita, mentre i termini che non contengono l'incognita sono detti termini noti.

I valori dell'incognita che soddisfano la equazione sono detti soluzioni o radici dell'equazione.

Due equazioni si dicono equivalenti quando tutte le soluzioni della prima sono anche soluzioni della seconda e viceversa.

Due equazioni equivalenti a una terza sono equivalenti tra loro.

In generale per risolvere un'equazione si cerca di trasformarla in un'altra ad essa equivalente, ma di forma più semplice.

Per far ciò si utilizzano i principi di equivalenza.

<u>1° principio di equivalenza</u>: "Aggiungendo ad entrambi i membri di una equazione lo stesso valore numerico o la stessa espressione algebrica si ottiene una equazione equivalente a quella data"

$$3x-5=x-1$$

è equivalente a $3x-5-x=\cancel{x}-1-\cancel{x}$

è equivalente a $2x-5=-1$

è equivalente a $2x-\cancel{5}+\cancel{5}=-1+5$

è equivalente a $2x=+4$

Da tale principio derivano le seguenti regole esemplificative:

- se uno stesso termine figura in entrambi i membri di un'equazione può essere soppresso;
- se due termini opposti si trovano nello stesso membro possono essere soppressi;

- si può trasportare un termine di un'equazione da un membro all'altro purché gli si cambi il segno (legge del trasporto).

L'ultima regola è quella che utilizzeremo per trasferire tutte le *x* al primo membro e tutti i termini noti al secondo membro.

<u>2° principio di equivalenza</u>: "Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione algebrica per uno stesso numero diverso da zero , o per una stessa espressione che non si possa annullare, si ottiene una equazione equivalente alla data"

$$3x+2=x-1 \quad \text{è equivalente a} \quad (3x+2)\cdot x=(x-1)\cdot x$$

$$3x+2=x-1 \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{3x+2}{3}=\frac{x-1}{3}$$

Da tale principio derivano le seguenti regole esemplificative:

- se i due membri di un'equazione hanno un fattore numerico comune questo può essere soppresso;
- cambiando i segni a tutti i termini di una equazione se ne ottiene un'altra equivalente;
- moltiplicando (o dividendo) i due membri di una equazione per una espressione, o numero, conveniente si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Tale principio si utilizza sia per eliminare denominatori comuni ad entrambi i membri, o per eliminare il coefficiente (parte numerica) della x al momento di calcolarne il valore finale.

$$2x=+4 \quad \text{dividendo entrambi i membri per 2} \quad \frac{2}{2}x=+\frac{4}{2} \quad \text{da cui semplificando} \quad x=+2$$

<u>Classificazione equazioni</u>

Le equazioni algebriche razionali sono così classificabili:
NUMERICHE: se non figurano altre lettere oltre l'incognita;
LETTERALI: se oltre l'incognita figurano altre lettere;
INTERE: se l'incognita non figura al denominatore;
FRATTE: se l'incognita figura anche, o solo, al denominatore.
Il grado di una equazione è dato dal grado massimo dell'incognita presente nell'equazione.
Il grado di una equazione è pari al numero delle possibili soluzione dell'equazione stessa.

<u>Risoluzione di una equazione</u>

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne le soluzioni.
Può darsi che una equazione non ammetta soluzioni, cioè non esista alcun valore delle incognite che la verifichi; si dice allora che la equazione è *impossibile* (il risultato sarà, in tale caso, 0 = ad un numero diverso da 0):

$$3x+2=3x-1 \quad \textit{che svolta darà come risultato} \quad 0=-3$$

Può darsi che una equazione ammetta un numero illimitato di soluzioni; si dice allora che l'equazione è *indeterminata* (in effetti non è una equazione ma è una *identità*; il risultato sarà, in tale caso, sempre 0 = 0):

$$3x+2=3(x-1)+5 \quad \textit{che svolta darà come risultato} \quad 0=0$$

Una equazione che ammette un numero finito di soluzioni si dice *determinata*.

<u>Risoluzione di una equazione di primo grado ad una incognita</u>:
Per risolvere una equazione di primo grado si seguono i seguenti passaggi:
1°) si eseguono tutte le operazioni presenti nei due membri;
2°) si eliminano i denominatori, se vi sono, moltiplicando entrambi i membri per il loro m.c.m.;

3°) si trasportano tutti i termini incogniti in uno stesso membro e i termini noti nell'altro cambiando il segno ai termini che vengono spostati (applicazione del 1° principio di equivalenza);
4°) si riducono i termini simili;
5°) si dividono il termine incognito e il termine noto per il coefficiente dell'incognita (applicazione del 2° principio di equivalenza).

ESEMPIO 1: $3(2-x)-5=5x-2(x-8)$

$$6-3x-5=5x-2x+16$$
$$-3x-5x+2x=-6+5+16$$
$$-6x=15$$
$$\frac{\cancel{-6}x}{\cancel{-6}}=\frac{\cancel{15}}{\cancel{-6}}$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

ESEMPIO 2: $3x-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}x+6 \quad \rightarrow \quad \frac{18x-4}{\cancel{6}}=\frac{3x+36}{\cancel{6}} \quad \rightarrow \quad 18x-3x=36+4 \quad \rightarrow$

$15x=40 \quad \rightarrow \quad \frac{\cancel{15}x}{\cancel{15}}=\frac{\cancel{40}}{\cancel{15}} \quad \rightarrow \quad \boxed{x=\frac{8}{3}}$ è la soluzione dell'equazione.

Verifica: $3\cdot\frac{8}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}+6 \rightarrow 8-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}+6 \rightarrow \frac{24-2}{3}=\frac{4+18}{3} \rightarrow \frac{22}{3}=\frac{22}{3}$ *vero.*

(la verifica non è obbligatoria; è consigliata solo in alcuni casi).

ESERCIZI

1) $3(x-1)-2x=4(x-2)-1$

2) $6(x+2)-3(x+4)+3=2x+4(x+1)$

3) $2(x-3)-5(1+x)-1=x+2(1-2x)$

4) $(x-3)(x+3)+1-3x=(x-2)(x+2)+4x-5$

5) $\frac{1+3x}{2}+\frac{1}{3}=\frac{x+6}{6}+\frac{x-2}{2}$

6) $\frac{x}{3}-\frac{x-4}{2}=\frac{6-x}{6}+1$

7) $\frac{1-x}{4}-\frac{2x-1}{2}=\frac{3x-1}{4}-x-\frac{2}{3}$

8) $\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)=\frac{x-4}{2}$

RISULTATI: $[2]$; $\left[-\frac{1}{3}\right]$; [impossibile] ; $\left[\frac{1}{7}\right]$; $[-1]$; [indeterminata] ; $\left[\frac{5}{3}\right]$; $[3]$