

ELEMENTI DI MATEMATICA FINANZIARIA E ATTUARIALE

SOMMARIO

PARTE I

Premessa

I) Il calcolo dell'interesse

I. 1. Regime finanziario dell'interesse semplice	2
I. 2. Regime finanziario dello sconto commerciale.....	2
I. 3. Regime finanziario dell'interesse composto.....	3
I. 4. Attualizzazione e valutazione	4
I. 5. Capitalizzazione frazionata: tassi equivalenti	5
I. 6. Scindibilità delle leggi di capitalizzazione	5

II) Rendite

II. 1. Generalità	6
II. 2. Simboli e formule	6
II. 3. Rendite frazionate	8

III. Costituzione di capitali

Con versamento unico oppure a rate costanti	9
---	---

IV. Rimborso di prestiti indivisi

Rimborso	9
IV. 1. Ammortamento americano	10
IV. 2. Ammortamento francese	10
IV. 3. Ammortamento italiano	11
IV. 4. Ammortamento tedesco	11
IV. 5. Valutazione di un prestito indiviso	12

PARTE II

Cenni sulla matematica attuariale

<u>VI. 1. Valutazione di importi aleatori</u>	14
<u>VI. 2. Valutazione di impegni dell'assicuratore</u>	15
<u>VI. 3. Le tavole demografiche</u>	17

Premessa

Qualunque bene avuto in prestito (ad eccezione dell'uso in comodato) comporta normalmente la corresponsione di un compenso. In particolare l'uso di una somma di danaro comporta il pagamento di un compenso chiamato "interesse". Al fine di quantificare l'interesse occorre che vengano stabilite delle regole che le due parti (il creditore e il debitore, chi dà e chi riceve in prestito) concordano assieme. L'insieme di queste regole ha dato l'avvio ad una disciplina che, nel tempo, ha preso il nome di matematica finanziaria. Naturalmente in questa disciplina trovano luogo anche questioni ben più complesse di quelle alle quali abbiamo accennato parlando della quantificazione dell'interesse, alcune delle quali, le tratteremo in questa dispensa. Qui si vuole indirizzare il lettore nelle problematiche di carattere finanziario e soprattutto nella valutazione degli importi esigibili in un'epoca futura. L'analisi sugli importi certi dà luogo alla matematica finanziaria vera e propria mentre la valutazione degli impegni aleatori, alla matematica attuariale, che è alla base del mondo assicurativo e che tratteremo nella seconda parte di queste lezioni.

I) Il calcolo dell'interesse

E' usuale che chi aliena un bene per un certo periodo di tempo, chieda una compensazione per la perdita di possesso del bene ceduto. Normalmente si fa riferimento al bene "denaro" ed il compenso che le due parti (chi presta e chi riceve in prestito) concordano per risarcire la perdita della possibilità di utilizzare il denaro che viene prestato, si chiama interesse. Ci occuperemo qui di seguito delle sole questioni che attengono tale compenso. Una questione che non tratteremo ma che è tutt'altro che trascurabile, riguarda il problema dei costi delle operazioni di prestito. Un istituto che presta denaro ha due tipi di costo: quello per le spese (a compenso del servizio bancario) e quello relativo alle imposte che la banca trattiene come sostituto d'imposta in nome e per conto dello Stato. Attualmente, nei depositi bancari la Banca è tenuta ad operare una ritenuta pari al 27%.

I.1. Regime finanziario dell'interesse semplice

Prendendo in considerazione la regola che stabilisce la semplice proporzionalità al capitale C impiegato e alla durata t dell'impiego, secondo un coefficiente di proporzionalità che indicheremo con i . Si avrà:

$$I = C \cdot i \cdot t \quad (1)$$

Ovviamente, gli importi I e C vengono misurati con la medesima unità di misura monetaria (euro, dollari, pesos, migliaia di euro o milioni di pesos...). La durata t viene normalmente espressa in unità annue o unità frazioni d'anno ($t = 1$ è un anno, $t = 1/12$ è un mese, $t = 1/365$ è un giorno). Quando t viene espresso in anni, il coefficiente di proporzionalità i assume il significato di **tasso annuo d'interesse** o semplicemente "tasso d'interesse" e viene espresso, d'ordinario in percentuale. Va precisato che la (1) viene impiegata normalmente soltanto per le durate t non superiori all'anno: $0 \leq t \leq 1$. Abbiamo descritto la ben nota "legge d'interesse semplice".

Facciamo un esempio: due persone concordano un prestito di capitale $C = 2.000$ € per una durata di sei mesi ($t = 1/2$) ad un tasso d'interesse $i = 5\%$. Allora l'interesse I da corrispondere alla fine del prestito sarà dato da $I = € 2.000 \cdot 0,05 \cdot 1/2 = € 50$. Dunque, scaduto il semestre, il creditore riceverà accanto al capitale, l'interesse, in totale il "montante" M :

$$M = C + I = C + C \cdot i \cdot t = C(1 + it) \quad (2)$$

Nel nostro esempio, il montante è pari a € 2.050. Naturalmente, se dovessimo tener conto che nei depositi bancari la Banca è tenuta ad operare una ritenuta pari al 27%, nel nostro esempio, e senza tener conto delle spese, la persona che chiede il prestito si vedrebbe remunerata non del 5% bensì del 3,65% ($5\% - 0,27 \cdot 5\%$), cioè non di €50 ma di € 36,5.

Ad ogni legge di capitalizzazione (che fa aumentare il capitale aggiungendo un interesse a mano a mano che trascorre il tempo), è associata una legge di sconto che ha l'effetto opposto, cioè ci riporta il montante futuro indietro nel tempo, facendolo diminuire, fino al valore C al momento attuale. Se è noto il montante M , che rappresenta il valore del capitale C dopo il tempo t , cioè il Valore Nominale, dalla (1) si ricava il valore attuale C :

$$C = M / (1 + i \cdot t)$$

Si definisce sconto semplice o razionale, il valore:

$$S_r = M - C = M - M / (1 + i \cdot t) = M \cdot i \cdot t / (1 + i \cdot t) = C \cdot i \cdot t$$

Dunque lo sconto semplice è l'interesse che la somma scontata produrrebbe se venisse impiegata allo stesso tasso per il tempo di anticipo.

I.2. Regime finanziario dello sconto commerciale

Consideriamo per prima la legge dello sconto. Se M è il valore nominale del credito o debito disponibile dopo un tempo t , se d è il tasso di sconto, lo Sconto Commerciale è proporzionale al valore nominale M e al tempo t (detto tempo di anticipo). Vale a dire:

$$S_c = M \cdot d \cdot t$$

Mentre la Somma Scontata o Valore Attuale C sarà:

$$C = M - S_c = M \cdot (1 - d \cdot t) \quad (2)$$

Affinché lo sconto non risulti superiore al valore nominale deve essere $1 - d \cdot t > 0$ cioè $t < 1/d$.

Dalla (2) è possibile calcolare il valore M del capitale C dopo il tempo t , per cui la legge di capitalizzazione commerciale è :

$$M = C / (1 - d \cdot t)$$

I.3. Regime finanziario dell'interesse composto

Abbiamo detto che per i prestiti di durata superiore all'anno, non viene quasi mai impiegata la (1) bensì un'altra regola, detta interesse composto. Nel regime finanziario dell'interesse composto, gli interessi maturati alla fine di ogni periodo si aggiungono al capitale e diventano fruttiferi per i periodi successivi. La legge di capitalizzazione composta per il capitale C impiegato per n anni (n è un numero intero) al tasso annuo i è la seguente:

$$M = C (1 + i)^n \quad (3)$$

Chiaramente, per $n = 1$ si ricade nella (1) quando si pone $t = 1$. La (3) è pensata solo per le durate uguali ad un numero intero di anni perché la logica secondo la quale è stata ottenuta prevede soltanto questo tipo di durate. Si ottiene facilmente ragionando che in base alla (1), dopo un anno, si ottiene $M = C (1+i)$; investendo nuovamente questo importo, dopo un altro anno il montante diviene $(C \cdot (1+i)) \cdot (1+i) = C \cdot (1+i)^2$; investendo questo importo dopo un altro anno si otterrà il montante $C \cdot (1+i)^3$ e così via. In questo modo siamo pervenuti al risultato della (3) dopo n anni interi.

Nel caso di tempi non interi, cioè in caso di durate superiori all'anno ma diverse da un numero intero di anni, si possono seguire due procedimenti: la convenzione lineare oppure la convenzione esponenziale. Sia $t = n + f$ dove n è un numero intero di anni ed f la parte frazionaria, con $0 \leq f < 1$. Il calcolo del montante M con la convenzione lineare è:

$$M = C \cdot (1 + i)^n \cdot (1 + i \cdot f) \quad (4)$$

Invece, il calcolo del montante M con la convenzione esponenziale è semplicemente:

$$M = C \cdot (1 + i)^t$$

Vediamo qualche esempio. Un capitale di € 10.000 prestato per 5 anni al tasso del 10% composto produce un montante $M = € 10.000 (1,10)^5 = 16.105,1$. In questa operazione l'interesse (al lordo di spese e imposte) è stato pari a € 6.105,1.

Un capitale di € 25.000 investito per 3 anni e 4 mesi al tasso del 3%, produce un montante lordo (con la convenzione lineare) pari a $M = € 25.000 \cdot (1,03)^3 \cdot (1 + 1/3 \cdot 0,03) = € 27.591,36$; in cui l'interesse è pari a € 2.591,36. Lo stesso capitale investito allo stesso tasso del 3% e per la medesima durata di 3 anni e 4 mesi (3 anni e un terzo = 3,33), con la convenzione esponenziale risulta $M = € 25.000 \cdot (1,03)^{3,33} = 27.588,4$.

La rappresentazione grafica della funzione montante descritta dalla (4) è una spezzata (funzione lineare a tratti) i cui segmenti sono sempre più inclinati in quanto nei punti aventi ascissa intera 0, 1, 2, 3,... le ordinate seguono i valori esponenziali $C, C \cdot (1+i), C \cdot (1+i)^2, C \cdot (1+i)^3 \dots$

Possiamo notare che con la convenzione lineare il montante (nell'esempio pari a € 27.591,36) è leggermente più elevato di quello risultante con la convenzione esponenziale (€ 27.588,4), ciò è semplicemente dovuto al fatto che nel periodo relativo alla frazione d'anno ($f = 4$ mesi) l'interesse è lineare $(1 + i \cdot f)$ mentre la curva relativa alla frazione d'anno nella convenzione esponenziale segue proprio una curva esponenziale che notoriamente è concava ed i suoi valori sono dunque leggermente al di sotto di quelli corrispondenti alla linea retta.

I.4. Attualizzazione e valutazione

Attraverso la (3) abbiamo visto come si calcola il montante M dopo n anni di un importo C . Abbiamo visto come “capitalizzare” l'importo C per n anni. Ora ci porremo il problema inverso. Sia A un importo che desideriamo investire in modo tale che, al tempo n , esso produca un montante assegnato K . Questo importo A si potrà ottenere dalla stessa (3) scrivendo K al posto di M ed A al posto di C : $K = A \cdot (1+i)^n$ da cui

$$A = K / (1+i)^n = K (1+i)^{-n}$$

E posto $1/(1+i) = (1+i)^{-1} = v$ ($0 < v < 1$)

$$A = K \cdot v^n \quad (6)$$

Dunque A viene ottenuto moltiplicando l'importo finale K per il fattore riduttivo v^n . L'importo A viene detto “valore attuale” di K esigibile al tempo n . L'operazione che da K conduce ad A viene chiamata attualizzazione di K . Ad esempio, il valore attuale di € 5.000 esigibili fra 6 anni ad un tasso di interesse del 2,5% è:

$$A = € 5.000 \cdot (1/1,025)^6 = € 4.311,48$$

Il valore $v = 1/(1+i)$ viene chiamato “fattore di attualizzazione” o “fattore di sconto”, ed è inversamente proporzionale ad i . Naturalmente per calcolare i a partire dalla conoscenza di v , dalla $1/(1+i) = (1+i)^{-1} = v$ si ottiene la relazione $i = 1/v - 1$.

Accanto al fattore di sconto v viene considerato spesso, soprattutto nella prassi bancaria, il “tasso di sconto” d che è pari ad $1 - v$. Inoltre, d è anche uguale ad $i \cdot v$ come si evince facilmente:

$$d = 1 - v = 1 - 1/(1+i) = i/(1+i) = i \cdot v$$

Lo sconto composto sarà:

$$S_c = K - A = K \cdot [1 - (1+i)^{-n}] = K \cdot (1 - v^n)$$

I.5. Capitalizzazione frazionata: tassi equivalenti

La capitalizzazione degli interessi può avvenire anche secondo periodi che sono sottomultipli dell'anno. Si parla in questo caso di capitalizzazione frazionata. Per determinare il montante in capitalizzazione frazionata non occorre scrivere nuove formule; valgono quelle già viste per la capitalizzazione annua, purché il tempo sia calcolato assumendo come unità di misura il periodo di capitalizzazione. Normalmente si indica con i il tasso annuo e con i_k il tasso relativo ad $1/k$ di anno. Dunque i_2 indica il tasso semestrale, i_3 quello quadrimestrale, i_4 il tasso trimestrale, i_6 il tasso bimestrale ed i_{12} il tasso mensile.

Come è naturale, nel regime dell'interesse composto non esiste proporzionalità fra tassi e montanti di uno stesso capitale impiegato per uno stesso tempo, vale a dire che il tasso semestrale del 2% non è equivalente al tasso annuo del 4%, come si può verificare con un qualsiasi esempio. Si pone allora il problema di trovare una relazione che lega due tassi i_h ed i_k relativi a due diversi periodi di capitalizzazione. Si dirà che due tassi i_h ed i_k relativi a due diversi periodi di capitalizzazione composta si dicono equivalenti se lo stesso capitale impiegato una volta al tasso i_h ed una volta al tasso i_k per lo stesso tempo produce lo stesso montante.

Posto $C = \text{€ } 1$ e $t = 1$ anno, si ha:

$$(1 + i_h)^h = (1 + i_k)^k$$

da questa relazione possiamo ricavarci il tasso incognito i_h o i_k .

Spesso, nella pratica commerciale accade che viene dato un tasso annuo nominale convertibile k volte all'anno, che viene indicato con j_k ed è dato dal prodotto del tasso i_k per il numero k dei periodi, ossia:

$$j_k = k \cdot i_k \rightarrow i_k = j_k / k$$

I.6. Scindibilità delle leggi di capitalizzazione

Chiamiamo $r(t)$ una legge di capitalizzazione. Diremo che $r(t)$ è **scindibile** se

$$r(t_1 + t_2) = r(t_1) \cdot r(t_2)$$

cioè, se $r(t_1 + t_2)$ rappresenta il montante di un capitale (unitario) investito per tutto il periodo $t_1 + t_2$, allora questo montante deve essere uguale a $r(t_1) \cdot r(t_2)$ che rappresenta il montante dello stesso capitale (unitario) investito al momento 0, disinvestito in t_1 e subito reinvestito per il periodo t_2 .

Come si può facilmente verificare, la legge dell'interesse composto è una legge scindibile in quanto

$$r(t_1) \cdot r(t_2) = (1+i)^{t_1} \cdot (1+i)^{t_2} = (1+i)^{t_1+t_2} = r(t_1 + t_2)$$

Invece, la legge dell'interesse semplice non è una legge scindibile giacché:

$$r(t_1) \cdot r(t_2) = (1+i \cdot t_1) \cdot (1+i \cdot t_2) = 1 + i \cdot (t_1 + t_2) + i^2 \cdot t_1 \cdot t_2 \neq r(t_1 + t_2) = 1 + i \cdot (t_1 + t_2)$$

II. RENDITE

II.1. Generalità

Passiamo ora a considerare operazioni più complesse. Dopo aver stabilito il concetto di valutazione di un importo esigibile ad una certa scadenza, è facile passare ora a considerare operazioni più complesse. Fra queste meritano particolare attenzione quelle che passano sotto il nome di “rendite”. Dicesi rendita una successione di importi (uguali o diversi) che si susseguono nel tempo ad intervalli regolari. Una rendita è dunque una successione di rate esigibili o pagabili in epoche diverse. Se gli importi si susseguono ad intervalli di un anno, si dice che la rendita è annua. Per fare la sua valutazione basta valutare i singoli importi e sommare i valori attuali ottenuti. Il valore attuale si calcola in epoca anteriore a tutte le scadenze o coincidente con la prima di esse. Il montante si calcola in epoca posteriore a tutte le scadenze o coincidente con l’ultima di esse.

Noi ci occuperemo delle rendite periodiche a rata costante. Una rendita si dice periodica quando le scadenze delle rate sono equidistanti. Se una rendita è periodica a rate costanti non occorre indicare per ciascuna rata l’importo e la scadenza, ma, fissato l’importo costante della rata, basterà indicare i tre elementi essenziali della rendita: il **periodo**, la **data di decorrenza** e la **durata**. In base al periodo una rendita potrà essere annuale se il periodo è l’anno, oppure frazionata se il periodo è inferiore all’anno oppure ancora poliennale se il periodo è multiplo dell’anno.

In base alla **data di decorrenza** una rendita potrà essere **anticipata** se la prima rata coincide con la data di decorrenza oppure **posticipata** se la prima rata scade un periodo dopo la data di decorrenza.

In base alla **durata** una rendita può essere **temporanea** quando è costituita da un numero limitato di rate oppure **perpetua** quando è costituita da un numero illimitato di rate.

Per quanto riguarda la determinazione del montante della rendita, esso viene calcolato alla fine dell’ultimo periodo; quindi il montante di una rendita posticipata viene calcolato all’atto dell’ultimo versamento, mentre quello di una rendita anticipata viene calcolato un periodo dopo l’ultimo versamento.

Infine, per quanto concerne la determinazione del valore attuale occorre distinguere fra rendite immediate se la prima rata coincide con la data di decorrenza o rendite differite se la prima rata scade **m** periodi dopo la data di decorrenza ($m > 1$).

II.2. Simboli e formule

Prima di addentrarci nella simbologia e nelle formule relative alla valutazione delle rendite, pensiamo ad un caso generico in cui ci sia una successione di importi del valore di € 3.500 alla fine di un anno, € 8.000 alla fine del secondo anno, e poi € 2.500, € 5.000, € 1.700 ed € 6.000, alla fine del 3°, 4°, 5° e 6° anno. In base alle conoscenze che abbiamo, per valutare questa rendita di importi differenti, basta valutare i singoli importi e sommare i valori attuali ottenuti. Se diciamo **A** il “valore” dell’intera rendita ed indichiamo con **i** il tasso (netto) di valutazione e con $v = 1/(1+i)$ il fattore di attualizzazione, abbiamo:

$$A = 3.500v + 8.000 v^2 + 2.500 v^3 + 5.000 v^4 + 1.700 v^5 + 6.000 v^6$$

Se si prende il tasso d'interesse per la valutazione, pari a 8%, a calcoli fatti riesce $A = \text{€ } 20.697,2$. E' questo dunque l'importo equivalente oggi alla rendita, cioè alla successione di importi esigibili alle scadenze indicate: A è il "valore" della rendita.

In generale, se si indicano con C_1, C_2, \dots, C_n gli importi ("termini" o "rate" della rendita) scadenti in $1, 2, \dots, n$, il valore della rendita A viene espresso dalla $A = C_1 v + C_2 v^2 + \dots + C_n v^n = \sum C_h v^h$

Una formula più compatta e di calcolo più rapido è quella che si ottiene nel caso speciale (ma assai consueto) in cui i termini siano uguali tra loro e unitari. Una rendita annua a rata costante si dice unitaria se la rata è di un euro, allora il valore attuale viene indicato con un simbolo particolare internazionalmente adottato: $a_{n\uparrow}$ ed è

$$a_{n\uparrow} = v + v^2 + \dots + v^n = (1 - v^n)/i \quad (7)$$

Questa rendita viene chiamata "**rendita unitaria, annua, immediata, posticipata, limitata di n anni**". Il valore $(1 - v^n)/i$ si determina facilmente ricordando, come abbiamo visto in I.4. che il fattore di attualizzazione $v=1/(1+i)$ da cui si ricava $(1-v)/v = i$ per cui $v/(1-v) = 1/i$ e facendo la differenza telescopica:

$$\begin{array}{r} a_{n\uparrow} = v + v^2 + \dots + v^n \\ - \\ v \cdot a_{n\uparrow} = v^2 + v^3 + \dots + v^n + v^{n+1} \\ \hline a_{n\uparrow} (1-v) = v - v^{n+1} = v(1 - v^n) \end{array}$$

da cui si ottiene $a_{n\uparrow} = (1 - v^n)/i$. A tale risultato si può arrivare anche con il ragionamento diretto, basterà pensare ad un signore che presta oggi 1 € per n anni, riscuote ogni anno l'interesse i sull'euro dato a prestito e, dopo n anni, ritira l'euro chiudendo così l'operazione. Con i simboli che abbiamo adottato possiamo direttamente scrivere: $1 = i \cdot a_{n\uparrow} + v^n$ di facile interpretazione, 1 è l'euro prestato oggi, $i \cdot a_{n\uparrow}$ rappresenta il valore della rendita di rata costante i , e v^n è il valore attuale dell'euro che verrà ritirato fra n anni. Da questa relazione si ricava subito la (7).

Se la rendita, anziché temporanea fosse perpetua ($n = \infty$) allora il termine v^n scomparirebbe giacché v è un numero minore di 1 e com'è noto il limite per n tendente a infinito di v^n con $v < 1$ è zero. Del resto nella rendita perpetua l'euro non verrebbe mai ritirato; dunque si avrebbe:

$$a_{\infty\uparrow} = 1/i \quad (8)$$

valore della "perpetuità" posticipata.

Accanto alla rendita immediata posticipata si può considerare anche quella "**anticipata**" la quale si differenzia dalla prima per il fatto che il primo termine non scade all'epoca 1 bensì al momento 0. In altri termini, tutte le rate sono esigibili all'inizio e non alla fine di ogni anno, sicché l'ultima rata (quella n-sima) scade in n-1 e non più in n. Il simbolo usato per rappresentare il valore di questa rendita anticipata è $\ddot{a}_{n\uparrow}$ ed essendo che tutti i termini, rispetto alla posticipata, sono anticipati di un anno, la rendita anticipata è uguale a quella posticipata capitalizzata per un anno, ossia

$$\ddot{a}_{n\uparrow} = (1 + i) \cdot a_{n\uparrow}$$

Ragionando in modo ancora più immediato, si ricava un'ulteriore relazione, molto pratica per i passaggi fra le due rendite:

$$\ddot{a}_{n\uparrow} = 1 + a_{n-1\uparrow} \quad (9)$$

In modo assai banale, si ottiene per la perpetuità anticipata la

$$\ddot{a}_{n\uparrow} = 1 + 1/i \quad (10)$$

Se la rendita posticipata è differita di m anni, la formula sarà:

$${}_m/a_{n\uparrow} = a_{n\uparrow} \cdot v^m$$

mentre la rendita anticipata, differita di m anni è:

$${}_m/\ddot{a}_{n\uparrow} = a_{n\uparrow} \cdot v^{m-1}$$

Se vogliamo valutare il montante di una rendita unitaria di n rate, basterà prendere la rendita posticipata o anticipata e capitalizzarla per n anni, moltiplicandola per $(1+i)^n$. Indicando con $s_{n\uparrow}$ e con $\ddot{s}_{n\uparrow}$ i rispettivi montanti delle rendite posticipate ed anticipate, avremo:

$$s_{n\uparrow} = [(1+i)^n - 1] / i \text{ se la rendita è posticipata}$$

$$\ddot{s}_{n\uparrow} = [(1+i)^n - 1] \cdot (1+i) / i \text{ se la rendita è anticipata}$$

II.3. Rendite frazionate

Una rendita è detta frazionata se il periodo della rendita è inferiore all'anno. Il calcolo del montante e del valore attuale di una tale rendita non presenta alcuna difficoltà se è assegnato il tasso i_k relativo al periodo della rendita o se è assegnato il tasso nominale convertibile k volte all'anno j_k ($i_k = k \cdot j_k$) perché in questi casi continuano a valere le formule già viste. Se il periodo della rendita è diverso dal periodo relativo al tasso d'interesse, si può determinare il tasso i_k equivalente al periodo della rendita e applicare le formule date.

Se di una rendita frazionata fosse dato il tasso annuo, per ovviare al calcolo piuttosto impegnativo che deriva dall'uso del tasso equivalente, è possibile ricorrere a particolari formule che permettono di trasformare una rendita con periodo $1/k$ di anno in una rendita annua. Indichiamo con $1/k$ di euro la rata della rendita da versare ad ogni $1/k$ di anno. La durata della rendita è espressa da n anni corrispondenti ad n·k periodi. Allora le formule del montante e del valore attuale sono:

$$s^{(k)}_{n\uparrow} = s_{n\uparrow} \cdot i / j_k \quad \text{montante di una rendita frazionata unitaria posticipata}$$

$$a^{(k)}_{n\uparrow} = a_{n\uparrow} \cdot i / j_k \quad \text{valore attuale di una rendita frazionata unitaria posticipata}$$

il fattore i / j_k dicesi fattore di correzione per le rendite frazionate posticipate ed è tabulato.

$$\ddot{s}^{(k)}_{n\uparrow} = s_{n\uparrow} \cdot i / j_k \cdot (1+i)^{1/k} \quad \text{montante di una rendita frazionata unitaria anticipata}$$

$$\ddot{a}^{(k)}_{n\uparrow} = a_{n\uparrow} \cdot i / j_k \cdot (1+i)^{1/k} \quad \text{valore attuale di una rendita frazionata unitaria anticipata}$$

anche il fattore $i / j_k \cdot (1+i)^{1/k}$ è tabulato e dicesi fattore di correzione per le rendite frazionate.

III. Costituzione di Capitali

La costituzione di un capitale può avvenire o con un versamento unico iniziale oppure con versamenti periodici costanti. Nel caso di un versamento unico iniziale si ha:

$$X = S \cdot (1+i)^{-n} = S \cdot v^n$$

Con versamenti periodici costanti, l'importo dei versamenti sono le rate R di una rendita avente al tasso i , come montante il capitale S da costituire. Se le rate sono posticipate, si ha:

$$R \cdot s_{n\overline{|\!|}i} = S \text{ da cui si ricava } R = S / s_{n\overline{|\!|}i} = S \cdot \sigma_{n\overline{|\!|}i}$$

Se le rate sono anticipate

$$R \cdot \ddot{s}_{n\overline{|\!|}i} = S \text{ da cui si ricava } R = S / \ddot{s}_{n\overline{|\!|}i} = S \cdot \ddot{\sigma}_{n\overline{|\!|}i}$$

Le somme che vengono versate e gli interessi maturati formano il c.d. “**fondo di costituzione**”. Se la costituzione del capitale avviene con versamenti periodici risulta utile conoscere l'andamento del fondo anno per anno. Si compila così un prospetto detto **piano di costituzione**. Il fondo costituito alla fine di ciascun anno si può calcolare senza redigere il piano. Indicando con F_h il fondo costituito dopo h anni, esso si ottiene calcolando il montante di una rendita di h rate, quindi si ha:

$$F_h = R \cdot s_{h\overline{|\!|}i} \text{ se la rata è posticipata}$$

$$F_h = R \cdot \ddot{s}_{h\overline{|\!|}i} \text{ se la rata è anticipata}$$

IV. Rimborsi dei prestiti indivisi

IV.1. Rimborsi

Un prestito si dice indiviso se il creditore è uno solo. Le principali forme di rimborso di un prestito sono:

- Rimborso globale del capitale e degli interessi alla scadenza
- Rimborso globale del capitale alla scadenza e pagamento periodico degli interessi
- Ammortamento = Rimborso graduale del capitale e pagamento periodico degli interessi

Nel primo caso il debitore prende in prestito la somma S e si impegna a pagare alla scadenza il montante.

Nel secondo caso il debitore prende in prestito la somma S e si impegna a pagarla alla scadenza, mentre gli interessi maturati vengono pagati periodicamente in via anticipata o posticipata.

Più interessante dal punto di vista pratico è il terzo caso, quello dell'ammortamento. In questo caso il rimborso avviene mediante il versamento periodico di rate. Ogni rata è comprensiva di una **quota di capitale** C_k , cioè di una parte del debito da rimborsare e di una **quota interessi** I_k , cioè degli interessi relativi al periodo, calcolati sulla parte di debito ancora da rimborsare. Dunque indicando con R_k la rata al k -simo periodo si ha $R_k = C_k + I_k$.

Nei rimborsi dei prestiti, valgono 3 condizioni di “chiusura”: chiusura elementare, chiusura iniziale e chiusura finale. La condizione di chiusura elementare è che la somma di tutte le quote capitali è uguale all'importo del prestito S da rimborsare, vale a dire $S = \sum C_k$.

Applicando il principio di equivalenza finanziaria in regime di interesse composto si possono scrivere le altre due condizioni di chiusura:

$$S = \sum^n R_k \cdot v^k \quad (\text{condizione di chiusura iniziale})$$

$$S \cdot (1+i)^n = \sum^n R_k \cdot (1+i)^k \quad (\text{condizione di chiusura finale})$$

Data la legge di scindibilità nei regimi di interesse composto, queste due condizioni sono **equivalenti**. Possiamo dunque dedurre che con la condizione di chiusura elementare ($S = \sum^n R_k \cdot v^k$) la costruzione del piano di ammortamento viene effettuata fissando le quote capitali, mentre con la condizione di chiusura iniziale o finale, la costruzione del piano di ammortamento viene fatta fissando le rate.

Infine, se si indica con D_k il debito residuo, cioè la parte di debito ancora da estinguere ($D_k = C_{k+1} + C_{k+2} + \dots + C_n$) e con E_k il debito già estinto, deve risultare vera la seguente equazione: $D_k + C_k = S$. Inoltre, la quota interesse I_k relativa al k -simo periodo si calcola sul debito residuo dell'anno precedente, cioè:

$$I_k = D_{k-1} \cdot i$$

IV.2. Ammortamento Americano

Si dice che un ammortamento è “americano” o “a due tassi” quando debitore e creditore convengono il pagamento periodico degli interessi e il rimborso globale del capitale alla scadenza, ma il debitore provvede alla costituzione rateale del capitale stesso. Di conseguenza, indicando con S il debito, con i il tasso di debito e con i^* il tasso di costituzione del capitale, il debitore versa periodicamente al creditore la quota interessi $S \cdot i$ e alla banca la rata di costituzione $R = S \cdot \sigma_{n|i^*}$. La rata totale periodica per il debitore è quindi:

$$R_t = S \cdot i + S \cdot \sigma_{n|i^*} = S \cdot (i + \sigma_{n|i^*})$$

IV.3. Ammortamento Francese

Si dice che un ammortamento è “francese” o “progressivo” quando le rate sono costanti. Per determinare la rata costante R d'ammortamento si pone la condizione che la somma S mutuata deve essere uguale al valore attuale delle rate, cioè:

$$S = R \cdot a_{n|i}$$

Dalla quale si ricava

$$R = S / a_{n|i}$$

Nell'ammortamento progressivo, dato che le rate sono costanti e le quote interessi sono decrescenti, le quote capitali sono crescenti in progressione geometrica di ragione $(1+i)$. Le formule per gli elementi del piano sono:

La quota capitale al k -simo anno è

$$C_k = R \cdot v^{(n-k)}$$

La quota interessi al k -simo anno è

$$I_k = R - C_k = R \cdot v^{(n-k)}$$

Il debito estinto al k -simo anno è

$$E_k = S \cdot \sigma_{n|i} \cdot s_{k|i}$$

Il debito residuo al k -simo anno è

$$D_k = R \cdot a_{n-k|i}$$

IV.4. Ammortamento Italiano

Si dice che l'ammortamento di un prestito è "italiano" o "uniforme" quando le quote capitali sono costanti. Indicando con S l'importo del prestito, con n la durata e con C la quota capitale costante si ha semplicemente $C = S/n$. Nell'ammortamento uniforme le quote interessi e le rate decrescono in progressione aritmetica di ragione $-S/n \cdot i$.

Le formule per gli elementi del piano sono le seguenti:

Il debito estinto al k-simo anno è	$E_k = k \cdot C = k \cdot S/n$
Il debito residuo al k-simo anno è	$D_k = S - E_k = S - k \cdot S/n = (n-k)/n \cdot S$
La quota interessi al k-simo anno è	$I_k = D_{k-1} \cdot i = (n-(k-1))/n \cdot S \cdot i = (n-k+1)/n \cdot S \cdot i$
La rata al k-simo anno è	$R_k = C_k + I_k = S/n [1 + (n-k+1) \cdot i]$

IV.5. Ammortamento Tedesco

Si dice che l'ammortamento di un prestito è del tipo "tedesco" quando all'ammortamento c.d. francese si pagano gli interessi anticipatamente. Dunque questo metodo di ammortamento è sostanzialmente progressivo ma differisce da quello francese unicamente per il fatto che gli interessi vengono pagati anticipatamente, mentre le rate sono sempre costanti e posticipate.

Dunque per determinare la rata (costante e posticipata) sarà necessario trovare una relazione tra il tasso annuo posticipato i ed il tasso annuo anticipato i^* .

Supponendo che il capitale sia di un euro, il debitore in realtà riceve $(1 - i^*)$ che, capitalizzato al tasso i , alla fine dell'anno dovrà dare un euro, talché $(1 - i^*) \cdot (1 + i) = 1$.

Da cui risulta

$$i = 1 / (1 - i^*) - 1 = i^* / (1 - i^*)$$

Ora è possibile calcolare la rata tenendo presente che il capitale effettivo da rimborsare è $S - S \cdot i^* = S \cdot (1 - i^*)$ da cui la rata sarà uguale ad $R = S \cdot (1 - i^*) \cdot a_{n|i}$.

Le formule per gli elementi del piano sono le seguenti:

La quota capitale al k-simo anno è	$C_k = R \cdot (1 - i^*)^{n-k}$
La quota interessi al k-simo anno è	$I_k = R - C_k = R \cdot [1 - (1 - i^*)^{n-k}]$
Il debito residuo al k-simo anno è	$D_k = R \cdot [1 - (1 - i^*)^{n-k}] / i^*$
Il debito estinto al k-simo anno è	$E_k = S - D_k$

IV.6. Valore di un prestito indiviso

Nel corso del rimborso di un prestito si presenta spesso il problema di procedere ad una valutazione del prestito che può servire quando il prestito viene estinto anticipatamente o quando il prestito viene ceduto oppure ancora quando si vuole stimare il prestito per motivi contabili come ad esempio per redigere un bilancio.

Per valutare un prestito si deve fissare un tasso di valutazione che chiameremo i_t . Si definisce valore del prestito il valore attuale al tasso i_t di tutte le somme che il debitore deve ancora versare al creditore. E' opportuno dividere il valore del prestito in due parti, distinguendo le somme da riscuotere in **conto interessi** dalle somme da riscuotere in **conto capitale**.

Si definisce **Nuda Proprietà** il valore attuale delle somme da riscuotere in conto capitale.

Si definisce **Usufrutto** il valore attuale delle somme da riscuotere in conto interessi.

Il valore del prestito è la somma dell'usufrutto e della nuda proprietà. Dunque indicando con V_k il valore del prestito al k-simo anno, con U_k l'usufrutto e con P_k la nuda proprietà, si ha:

$$V_k = U_k + P_k$$

Il calcolo del valore del prestito e la sua scomposizione in nuda proprietà ed usufrutto può, il più delle volte, non essere agevole. In questi casi ci si serve della formula di Achard-Makeham:

$$D_k = U_k \cdot i_t / i + P_k$$

Se indichiamo con S ed i rispettivamente l'importo ed il tasso del prestito e con k l'anno di valutazione, avremo: per il valore di un prestito con rimborso globale del montante:

$$V_k = S \cdot (1+i)^n \cdot (1+i)^{-(n-k)}$$

$$P_k = S \cdot (1+i)^{-(n-k)}$$

$$U_k = V_k - P_k$$

Il valore di un prestito con rimborso globale e pagamento periodico degli interessi:

$$P_k = S \cdot (1+i)^{-(n-k)}$$

$$U_k = S \cdot i \cdot a_{n-k|i}$$

$$V_k = U_k + P_k = S \cdot (1+i)^{-(n-k)} + S \cdot i \cdot a_{n-k|i}$$

Il valore di un prestito con ammortamento francese:

$$V_k = R \cdot a_{n-k|i}$$

Per calcolare P_k sostituiamo nella formula di Achard-Makeham $U_k = V_k - P_k$ e ponendo $i \neq i_t$ abbiamo: $P_k = (i_t \cdot V_k - i \cdot D_k) / (i_t - i)$ da cui segue $P_k = R \cdot (i_t \cdot a_{n-k|i} - i \cdot a_{n-k|i}) / (i_t - i)$

Se $i_t = i$ allora $D_k = V_k$ e si ha $P_k = (n-k) \cdot C_k = (n-k) \cdot R \cdot (1+i)^{-(n-k+1)}$

Infine, si ricava l'usufrutto: $U_k = V_k - P_k = R \cdot i \cdot (a_{n-k|i} - a_{n-k|i}) / (i_t - i)$

V. Obbligazioni

V.1. Generalità

Gli enti pubblici e le grandi società per azioni hanno sovente bisogno di prestiti di importo così ingente che non possono trovare un'unica persona o Ente disposta a soddisfare le loro richieste. In questo caso, gli enti pubblici si rivolgono al pubblico dei risparmiatori. Molti sono allora i creditori ed ognuno riceve un titolo rappresentativo del suo credito, tali titoli si dicono **obbligazioni**.

Ogni titolo che rappresenta un credito (cioè ogni obbligazione) porta stampato il proprio **valore nominale**, vale a dire l'importo del prestito rappresentato da quel titolo. E' su questo valore nominale che si calcola l'interesse. Si definisce **prezzo di emissione** il prezzo pagato dal sottoscrittore all'emittente; mentre **prezzo di rimborso** è, invece, l'importo pagato a scadenza dall'emittente all'obbligazionista. Sia l'emissione, sia il rimborso, possono avvenire *alla pari* oppure *sopra la pari* o *sotto la pari*. Infine, si chiama **corso** il prezzo a cui una obbligazione viene scambiata sul mercato.

Al fine di sviluppare alcune formule, definiamo i seguenti parametri:

S = Debito

N = Numero di titoli

i = tasso d'interesse nominale

C = Valore nominale

Cr = prezzo di rimborso

Ca = prezzo di emissione

V. 2. Tipi di rimborso

- **Prestiti con rimborso globale:** è previsto il rimborso alla fine del contratto ed il pagamento periodico degli interessi;
- **Prestiti con rimborso graduale:** il debitore paga periodicamente una rata che comprende l'interesse sul debito residuo e una quota capitale. Mentre la quota interessi serve a pagare gli interessi a tutti gli obbligazionisti, la quota capitale serve a rimborsare per intero solo alcuni obbligazionisti, quelli estratti a sorte;
- **Prestiti irredimibili:** non previsto rimborso ma solo pagamento degli interessi per sempre;

Indichiamo ora con C_k la quota capitale e con $N_k = C_k / Cr$ il numero di obbligazioni da rimborsare ad ogni scadenza, con L_k il numero di obbligazioni in circolazione, con D_k il debito residuo, nel piano di emissione si deve precisare come avverrà il rimborso. Di solito ci sono altre clausole come la facoltà da parte dell'Ente emittente di acquistare sul mercato per accelerare l'ammortamento o l'estrazione di premi (che indicheremo con P_k) per allettare i sottoscrittori. Ora calcoleremo la rata per i vari tipi di rimborso:

Prestiti con rimborso globale

$$R_k = N \cdot C \cdot i \quad \text{per ogni } k \neq n \quad \text{(più eventuale } P_k)$$

$$R_n = N \cdot C \cdot i + N \cdot C_r \quad \text{per } k = n \quad \text{(più eventuale } P_k)$$

Prestiti con rimborso graduale (obbligazioni)

$$R_k = N_k \cdot C_r + L_{k-1} \cdot C \cdot i \quad \text{per } k = n \quad \text{(più eventuale } P_k)$$

Prestiti irredimibili

$$R_k = N \cdot C \cdot i \quad \text{(più eventuale } P_k)$$

VI. VALUTAZIONE DI IMPORTI ALEATORI

Abbiamo visto come calcolare il valore attuale di un importo C esigibile tra n anni: fissato il fattore di attualizzazione v (tramite l'opportuna scelta del tasso di valutazione i), il valore di C è oggi $C \cdot v^n$. Naturalmente, la cosa cambia se di fronte ad un importo non più certo come C , ci fosse un importo aleatorio. In molti ambiti scientifici e soprattutto nel settore assicurativo, gli importi in gioco sono aleatori per loro stessa natura. Ad esempio se ci si chiede a quanto ammonteranno i ricavi di una certa impresa a fine anno oppure quale sarà il risarcimento del danno a carico di una compagnia di assicurazione sul sinistro da incendio che è stato appena denunciato oppure ancora quando verrà il momento per la compagnia di dover sborsare il capitale assicurato di 100.000 euro a favore dei beneficiari di una certa polizza in caso di morte, ecc. sono tutti esempi concreti ai quali occorre dare risposte utilizzando strumenti matematici della matematica attuariale.

Incominciamo a distinguere due tipi di questioni: quelle riferite al quanto e quelle riferite al quando. In effetti, se ci riallacciamo alle tre domande che ci siamo fatti precedentemente, nella prima e nella seconda è tipicamente l'importo ad essere aleatorio, nella terza l'aleatorietà non risiede nell'importo che è certo (€ 100.000) bensì nel quando, cioè nel momento in cui questo dovrà essere erogato. Risulta del tutto evidente che le due questioni, (del quanto e del quando), si ricompattano non appena ci si ponga a ragionare non sugli importi al momento della loro scadenza ma sul **valore attuale** di essi, riconducendo la questione alla sola aleatorietà degli importi. Questa è la ragione per la quale è possibile trattare in modo unitario questi problemi, senza far rilevare la differenza fra aleatorietà d'importo e di scadenza.

Proviamo ora a dare una valutazione alla variabile aleatoria (v.a.) X , valore attuale aleatorio dell'importo in gioco. Tale valutazione non è una grandezza aleatoria poiché abbiamo bisogno di quantificare un "equivalente certo", per esempio una somma da appostare a bilancio o che comunque ci serva da riferimento certo per le nostre previsioni. Dunque bisogna operare una scelta, la scelta di un "criterio" che partendo dall'aleatorio produca un dato certo.

Qui ci viene in aiuto il concetto di speranza matematica di una v.a. che rappresenta l'importo certo che siamo disposti a pagare (o ricevere) in cambio della determinazione della v.a. che effettivamente si verificherà. E' dunque la speranza matematica $E(X)$ l'equivalente certo dell'importo aleatorio X . Vediamo un esempio: il valore attuale aleatorio X di un impegno assunto da una compagnia d'assicurazione si configura nelle seguenti due possibilità:

- con probabilità 1% è pari ad un valore attuale di € 50.000;
- con probabilità 99% è uguale a zero;

Allora sarà:

$$E(X) = € 50.000 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,99 = € 500$$

Per la Compagnia quell'impegno aleatorio equivale ad un impegno certo di € 500. Dovendo rivalersene sul contraente della polizza di assicurazione la compagnia sa che non potrà chiedergli meno di quella somma. Abbiamo dunque fissato un criterio fondamentale: quello della speranza matematica. Resta solo da chiedersi: come farà la compagnia a sopportare l'eventuale (anche se poco probabile) esborso di 50.000 euro avendo incassato a fronte di quell'impegno, soltanto € 500 ? Chi assicura assume dei rischi e sa che questa attività può comportare perdite o guadagni, ma sa anche che, stipulando un gran numero di polizze, se le probabilità sono state ben valutate ed i premi ben calibrati, avverrà fra di esse una compensazione di perdite e guadagni, in modo che con altissima probabilità equilibrare il risultato finale. Di tali questioni si occupa la "teoria del rischio" che in queste lezioni non può essere trattata.

V.2. Valutazione di impegni dell'assicuratore

Abbiamo visto che il criterio della speranza matematica ci ha insegnato a valutare, in generale, il valore attuale di un importo aleatorio. Quali sono in concreto gli impegni che un assicuratore assume nella gestione della sua attività? Distingueremo subito due grandi famiglie di rischi: quelli derivanti dall'esercizio dell'assicurazione sulla vita e quelli derivanti dall'esercizio dell'assicurazione contro i danni (la c.d. "non vita"). Per i secondi, data la loro estrema eterogeneità, va applicato con molta attenzione il principio della speranza matematica agli importi aleatori che configurano i possibili danni oggetto di risarcimento.

Per i primi, quelli riguardanti l'assicurazione sulla vita, affronteremo di seguito due casi particolari che costituiscono gli elementi di base di tale assicurazione. Essi sono: l'impegno di corrispondere un capitale (per comodità lo supporremo sempre unitario) ai beneficiari di una polizza in caso di morte dell'assicurato se questa si verificherà in un prestabilito anno. L'altro caso riguarda l'impegno di corrispondere un capitale unitario ai beneficiari di una polizza in caso di vita dell'assicurato in un prestabilito anno. In pratica, gli impegni elementari sono: pagare € 1 se l'assicurato muore nell'anno h oppure pagare € 1 se l'assicurato è vivo alla fine dell' h -simo anno.

Tramite questi due impegni elementari vengono costruite tutte le forme assicurative sulla vita, distinguendole, come abbiamo appena fatto, in polizze "in caso di morte" e polizze "in caso di vita". Cominciando con il primo impegno: qual è la v.a. da considerare? A rappresentare il valore attuale dell'impegno della Compagnia destiniamo la v.a. S_h . Ricordiamoci che l'impegno riguarda il pagamento al decesso dell'importo unitario, a partire dalla data di stipula del contratto, ma soltanto se esso si verifica nell' h -simo anno cioè fra l'anno $h-1$ e l'anno h . Per semplicità formale, conveniamo che l'attualizzazione di quell'importo unitario venga effettuata come se lo stesso dovesse venire erogato alla fine dell'anno contrattuale in cui è avvenuto il decesso (anziché immediatamente dopo, come accade in realtà). Allora la struttura della v.a. S_h , è la seguente:

$$S_h = \begin{cases} v^h \rightarrow q_h \\ 0 \rightarrow 1 - q_h \end{cases}$$

dove q_h indica la probabilità che l'assicurato muoia esattamente fra $h-1$ ed h , cioè nell' h -simo anno del contratto, e $1 - q_h$ è la probabilità di sopravvivenza all'anno h , e cioè che l'assicurato muoia in un qualsiasi altro anno (o prima di $h-1$ o dopo h). Il valore di questo impegno, la sua speranza matematica è $E(S_h) = v^h \cdot q_h$. Questo importo viene indicato con il simbolo attuariale ${}_{h-1/1}A_x$ in cui, a sinistra, si legge l'anno di inizio del periodo in cui deve avvenire la morte, la durata - 1 anno - di quel periodo e, a destra, x indica l'età dell'assicurato all'epoca della stipula del contratto. In conclusione l'impegno del contratto elementare in caso di morte vale

$${}_{h-1/1}A_x = v^h \cdot q_h \quad (11)$$

Ora passiamo a considerare l'altro impegno, quello nel caso di vita, il cui valore attuale indicheremo con Z_h . Tale impegno consiste nel liquidare il capitale unitario alla fine dell' h -simo anno di contratto se l'assicurato sarà in vita a quella data. La struttura di Z_h è la seguente:

$$Z_h = \begin{cases} v^h \rightarrow p_h \\ 0 \rightarrow 1 - p_h \end{cases}$$

dove la probabilità che l'assicurato sia in vita in h è p_h , mentre che non lo sia è ovviamente $1 - p_h$.

Risulta opportuno poter esprimere p_h in termini di q_h cioè delle probabilità di morte che abbiamo usato nello schema precedente. Essendo $q_1, q_2, \dots, q_h, \dots$ le probabilità di morte dell'assicurato nel 1°, nel 2°, ..., nell'h-simo anno, ... la probabilità p_h di sopravvivere almeno fino ad h deve esser uguale alla somma delle probabilità che egli ha di morire dopo h, cioè

$$p_h = q_{h+1} + q_{h+2} + q_{h+3} + \dots$$

e questa somma che in teoria non si chiuderebbe mai, è invece limitata ad un ragionevole numero di addendi, l'ultimo dei quali riguarda l'anno estremo in cui si dovrà arrestare la vita di qualsiasi essere umano. Questa "età estrema" che con gli avanzi della medicina si sposta sempre più in là, viene indicata con la lettera omega dell'alfabeto greco: ω . Poiché il nostro assicurato alla stipula della polizza aveva età x , l'ultimo addendo reca l'indice $\omega - x$.

Dunque è

$$p_h = q_{h+1} + q_{h+2} + q_{h+3} + \dots + q_{\omega-x}$$

Osserviamo a questo punto che la "durata residua di vita" a partire dalla stipula del contratto per l'assicurato di età iniziale x è una v.a. Chiamiamo T_x tale variabile aleatoria. Le sue determinazioni sono:

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow q_1 \\ 2 &\rightarrow q_2 \\ &\dots \\ h &\rightarrow q_h \\ &\dots \\ \omega - x &\rightarrow q_{\omega-x} \end{aligned}$$

Ricordando che $\sum^{\omega-x} q_h = 1$, cioè che la sommatoria fino ad $\omega - x$ è necessariamente 1 (vale a dire che la probabilità di morire entro l'età estrema ω , è un evento certo) si ha che

$$p_h = 1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_h)$$

Il valore dell'impegno in caso di vita, che prende il nome di "capitale differito" e si indica con ${}_nE_x$ è dato dalla

$${}_nE_x = v^h \cdot p_h = v^h \cdot [1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_h)] \quad (12)$$

Immediatamente collegato a questo valore c'è quello della "rendita vitalizia": Si tratta della medesima rendita annua unitaria che abbiamo visto nel capitolo II il cui valore veniva espresso dalla (7), con la differenza che ora il pagamento delle rate è subordinato all'esistenza in vita dell'assicurato. E' dunque chiaro che una rendita vitalizia, temporanea o perpetua, ha un valore inferiore a quello della rendita che abbiamo visto in precedenza e che, per distinguerla, chiameremo rendita certa. Il valore è inferiore in quanto ognuno dei suoi termini v^h sono "pesati" con la probabilità che l'assicurato sia in vita in quel momento e quindi con p_h che sono minori di 1. Dunque si tratta di una valutazione pesata con le probabilità di sopravvivenza che dà origine al concetto di valutazione "attuariale", cioè, valutazione fatta in termini demografico-finanziari.

Per calcolare il valore della rendita (detta anche "annualità") vitalizia non c'è che da mettere assieme tanti capitali differiti, ognuno dei quali rappresenta un termine, ora aleatorio, della rendita stessa. Per la rendita vitalizia, annua, unitaria, temporanea, di n anni, immediata, posticipata, il valore, che si indica con $a_{x:n}$ è dunque dato dalla

$$a_{x:n} = {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_nE_x \quad (13)$$

Per la rendita senza vincolo di temporaneità,

$$a_x \gamma = {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_{\omega-x-1}E_x \quad (14)$$

Per le analoghe rendite anticipate

$$\ddot{a}_{x:n} \gamma = I + {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_{n-1}E_x = I + a_{x:n-1} \gamma \quad (15)$$

e

$$\ddot{a}_x \gamma = I + {}_1E_x + {}_2E_x + \dots + {}_{\omega-x-1}E_x = I + a_x \gamma \quad (16)$$

Infine, hanno anche una notevole rilevanza le « rendite differite » le quali decorrono dall'inizio (se si tratta di anticipata) o dalla fine (se posticipata) dell'm-simo anno successivo alla stipula del contratto. Le formule, con il consueto significato dei simboli, sono:

$${}_m/a_{x:n} \gamma = {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + \dots + {}_{m+n}E_x \quad (17)$$

$${}_m/a_x \gamma = {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + \dots + {}_{\omega-x-1}E_x \quad (18)$$

$${}_m/\ddot{a}_{x:n} \gamma = {}_mE_x + {}_{m+1}E_x + \dots + {}_{m+n-1}E_x \quad (19)$$

$${}_m/\ddot{a}_x \gamma = {}_mE_x + {}_{m+1}E_x + \dots + {}_{\omega-x-1}E_x \quad (20)$$

V. 3. Le tavole demografiche

Cercheremo ora di calcolare le probabilità di morte q_n , costituenti una partizione relativa alla v.a. T_x durata residua di vita dell'assicurato di età x al momento della stipula del contratto. Rifacendoci al concetto di probabilità dovremo esprimere un giudizio che riguardi la persona da assicurare e che si configuri nella distribuzione di probabilità che noi le assegniamo. Nella pratica assicurativa sono invalsi metodi standard che si basano sui seguenti parametri: sesso, età, tavole demografiche generali o particolari, esito della visita medica (solo per assicurazioni individuali in caso di morte).

Questa scelta di assegnare le probabilità con tecniche standardizzate assomiglia a quella che le grandi industrie di abbigliamento adottano per la loro produzione di serie. L'abito su misura per tutti richiederebbe molto più tempo e più denaro. Meglio confezionare un certo numero di taglie standard che possano andar bene per la maggioranza degli acquirenti ed operare poi degli aggiustamenti per un numero limitato di clienti. In assicurazione caso morte i correttivi vengono eventualmente operati a seguito della visita medica e consistono fondamentalmente in aggravii di mortalità.

La distribuzione di probabilità, soggetto per soggetto, viene così attribuita sulla scorta degli elementi che, statisticamente, risultano i più significativi. La sopravvivenza infatti dipende in larga misura da quegli elementi (sesso, età, ecc.) e, in misura minore, da altri parametri che non sempre si prendono in considerazione (professione dell'assicurato, precedenti assicurativi, ...).

Pertanto il riferimento principale rimane sempre la tavola demografica di sopravvivenza e/o di mortalità.

Queste tavole vengono ricavate, con metodologie abbastanza sofisticate, dalle statistiche che riguardano periodi spesso largamente antecedenti rispetto a quello in cui vengono poi utilizzate. Le tavole quindi dovranno essere opportunamente ritoccate affinché la loro applicazione agli anni futuri risulti sufficientemente appropriata. Vediamo ora com'è strutturata una tavola demografica nei suoi elementi essenziali. Essa raccoglie la statistica dei sopravvissuti alle varie età originati da una popolazione di neonati (età 0) che costituisce la "base" della tavola e che, di solito, è assunta pari a 100.000 unità. Il numero di sopravvissuti all'età x è indicato con l_x (si tratta di coloro che hanno compiuto esattamente x anni) e valgono pertanto le seguenti relazioni: $l_0 = 100.000$ e $l_\omega = 0$.

Con ω età estrema che dipende da tavola a tavola e che si aggira intorno ai 110 anni. Con d_x viene indicata la differenza $l_x - l_{x+1}$ che rappresenta il numero di morti di età x (ossia di coloro che hanno compiuto x anni ma non hanno raggiunto l'età $x+1$). Qui di seguito riportiamo la tavola di sopravvivenza e mortalità relativa alla popolazione generale italiana maschile (SIM 1981) pubblicata dall'ISTAT nell'aprile 1986. Sulla base di questa tavola siamo ora in grado di calcolare assai agevolmente le probabilità q_h che ci interessano. Infatti, riferendoci all'individuo di età x , cominceremo col porre

$$q_1 = d_x / l_x$$

Abbiamo dunque assegnata la probabilità di morte nel primo anno di contratto q_1 pari al rapporto fra i deceduti di età x ed i viventi che avevano raggiunto l'età x .

TAVOLA SIM 1981

x	l_x	d_x	x	l_x	d_x	x	l_x	d_x	x	l_x	d_x
0	100.000	1.533	27	96.752	95	54	89.032	891	81	27.824	3.274
1	98.467	76	28	96.657	94	55	88.141	976	82	24.550	3.139
2	98.391	52	29	96.563	95	56	87.165	1.070	83	21.411	2.973
3	98.339	39	30	96.468	95	57	86.095	1.155	84	18.438	2.777
4	98.300	33	31	96.373	100	58	84.940	1.235	85	15.661	2.556
5	98.267	32	32	96.273	103	59	83.705	1.360	86	13.105	2.316
6	98.235	30	33	96.170	104	60	82.345	1.446	87	10.789	2.061
7	98.205	29	34	96.066	112	61	80.899	1.541	88	8.728	1.801
8	98.176	29	35	95.954	117	62	79.358	1.628	89	6.927	1.543
9	98.147	27	36	95.837	128	63	77.730	1.712	90	5.384	1.293
10	98.120	27	37	95.709	144	64	76.018	1.823	91	4.091	1.057
11	98.093	26	38	95.565	162	65	74.195	1.971	92	3.034	843
12	98.067	30	39	95.403	179	66	72.224	2.094	93	2.191	654
13	98.037	39	40	95.224	199	67	70.130	2.226	94	1.537	492
14	97.998	51	41	95.025	218	68	67.904	2.346	95	1.045	359
15	97.947	68	42	94.807	240	69	65.558	2.483	96	686	252
16	97.879	88	43	94.567	264	70	63.075	2.658	97	434	170
17	97.791	101	44	94.303	300	71	60.417	2.817	98	264	110
18	97.690	111	45	94.003	341	72	57.600	2.982	99	154	69
19	97.579	112	46	93.662	388	73	54.618	3.122	100	85	40
20	97.467	107	47	93.274	437	74	51.496	3.236	101	45	23
21	97.360	106	48	92.837	485	75	48.260	3.324	102	22	11
22	97.254	106	49	92.352	530	76	44.936	3.428	103	11	6
23	97.148	102	50	91.822	590	77	41.508	3.460	104	5	3
24	97.046	101	51	91.232	658	78	38.048	3.453	105	2	2
25	96.945	98	52	90.574	733	79	34.595	3.417	106	-	-
26	96.847	95	53	89.841	809	80	31.178	3.354	107	-	-

Dunque per $x = 60$, i morti sono 1.446 su 82.345, per cui la probabilità $q_{60} = 1.446/82.345 = 1,75\%$. E' chiaro che questo rapporto, ottenuto come dato statistico e adottato come probabilità, si riferisce ad una collettività in cui il nostro assicurato, per tutta una serie di circostanze, potrebbe non riconoscersi, ma, lo abbiamo già sottolineato, all'assicuratore occorre pur sempre un punto di riferimento che possa valere per un ampio numero di soggetti. Con analoghi ragionamenti si può assumere, in generale,

$$q_h = d_{x+h-1} / l_x = (l_{x+h-1} - l_{x+h}) / l_x$$

e trovare così la cercata distribuzione degli q_h , che ci consentono di calcolare il valore degli impegni delle polizze caso morte secondo la (11): ${}_{h-1|}A_x = v^h \cdot q_h$. Le probabilità p_h che servono per calcolare i capitali differiti ${}_hE_x = v^h \cdot p_h = v^h \cdot [1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_h)]$ secondo la (12) possono essere calcolate o come $1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_h)$ o, più semplicemente come $p_h = l_{x+h}/l_x$ di chiara interpretazione: viventi all'età $x+h$ diviso quelli che erano vivi all'età x . E' chiaramente $p_h + q_h = 1$; così, ad esempio, $p_{60} = 80.899/82.345 = 98,25\%$ è il valore complementare a $q_{60} = 1.446/82.345 = 1,75\%$

Fissiamo l'attenzione su un esempio. Il nostro assicurato maschio abbia un'età $x = 70$. La distribuzione di probabilità della sua residua durata di vita, cioè della v.a. T_{70} sviluppando i valori $q_h = d_{x+h-1} / l_x$ è quella indicata qui sotto:

$$q_1 = d_{70} / l_{70} = 2.658/63.075 = 0,04214$$

$$q_2 = d_{71} / l_{70} = 2.817/63.075 = 0,04466$$

$$q_3 = d_{72} / l_{70} = 2.982/63.075 = 0,04728$$

...

$$q_{35} = d_{105} / l_{70} = 2/63.075 = 0,0000317$$

La speranza matematica di T_{70} , $E(T_{70}) = \sum^{35} h \cdot q_h$ e risulta a conti fatti, uguale a 11 anni.

La cosiddetta "vita media" all'età x , \bar{e}_x viene espressa dalla:

$$\bar{e}_x = E(T_x) - 1/2$$

nella quale il correttivo $-1/2$ è dovuto al fatto che, data l'uniforme distribuzione dei decessi nel corso dell'anno, la morte si fa cadere a metà anno.

A questo punto sarà opportuno un breve commento su questi ultimi risultati, commento che si collega alla veloce dinamica della sopravvivenza sia nel nostro Paese, sia nei Paesi più industrializzati. Facciamo il confronto tra la SIM e SIF (Statistiche Italiane Maschi e Femmine) cioè tra la SIM 1901 e la SIM 1981 e tra la SIF 1901 e la SIF 1981:

SIM 1901	$l_{70} = 28.378$	$l_{80} = 9.401$	$\bar{e}_{70} = 8,0$	$\bar{e}_{80} = 4,2$
SIM 1981	$l_{70} = 63.075$	$l_{80} = 31.178$	$\bar{e}_{70} = 10,5$	$\bar{e}_{80} = 5,8$
SIF 1901	$l_{70} = 29.672$	$l_{80} = 9.030$	$\bar{e}_{70} = 8,0$	$\bar{e}_{80} = 4,2$
SIF 1981	$l_{70} = 80.629$	$l_{80} = 53.872$	$\bar{e}_{70} = 13,4$	$\bar{e}_{80} = 7,3$

Se si esamina il valore della funzione di sopravvivenza l_x in corrispondenza a due soli valori $x = 70$ ed $x = 80$ e si mette accanto ad essi, quelli della vita media a 70 e 80 anni, si nota che dal 1901 al 1981, in soli 80 anni, la probabilità alla nascita di arrivare all'età di 70 anni è passata dal 28% al 63% per i maschi (+222%) e dal 30% all'81% per le femmine (+272%) mentre la probabilità alla nascita di arrivare agli 80 anni è passata dal 9% al 31% per i maschi (+332%) e dal 9% al 54% per le femmine (+579%).

E' ovvio che ci si trova di fronte ad un sempre ulteriore e regolare miglioramento della durata di vita, ciò se da una parte rappresenta un dato assai positivo dovuto alle migliorate condizioni di vita ed in special modo alle conquiste della scienza medica, dall'altro costituisce un problema per chi si deve far carico delle prestazioni pensionistiche, in primis l'Istituto di Previdenza Sociale, i fondi pensione, le compagnie di assicurazione sulla vita. Questo spiega come l'istituto di vigilanza per le assicurazioni private, l'Isvap, abbia provveduto in passato a suggerire alle compagnie le modalità di correzione delle tavole demografiche in uso al fine di proiettare nel prossimo futuro i probabili miglioramenti della sopravvivenza.

---oooOooo---